Cvičení IX

Teorie

Věta 1 (Farkasova věta)**.** Soustava $Ax = b$ má nezáporné řešení ($x \geq 0$) právě tehdy, když pro každé $u \in \mathbb{R}^m$, které splňuje $A^T u \geq 0$, platí $b^T u \geq 0$.

Geometricky. Množina $\{Ax : x \geq 0\} = \text{pos}\{a_1, \ldots, a_n\}$ je kužel generovaný sloupci matice A. Vektor b v něm buď leží (soustava má nezáporné řešení), nebo existuje $\tilde{u}$ ($= -u$) takové, že $a_j^T \tilde{u} \leq 0$ pro všechna j, ale $b^T \tilde{u} > 0$: nadrovina $\{y : \tilde{u}^T y = 0\}$ oddělí b od kuželu. (Připomenutí: $v^T w > 0$, $= 0$, < 0 podle toho, zda vektory svírají ostrý, pravý, nebo tupý úhel.)

Odvození z duality. Úloha $\max\{0^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ má duální úlohu $\min\{b^T u : A^T u \geq 0,\ u \in \mathbb{R}^m\}$. Je-li primární úloha přípustná, má optimum 0, a podle slabé duality je $b^T u \geq 0$ pro každé přípustné u. Naopak platí-li $b^T u \geq 0$ pro všechna přípustná u, má duální úloha optimum 0 (v $u = 0$) a podle silné duality má optimum i primární úloha.

Jiný tvar soustavy převedeme na $Ax = b$, $x \geq 0$: doplňkové proměnné u nerovností, $\tilde{x}_j = -x_j$ pro $x_j \leq 0$ a $x_j = x_j^+ - x_j^-$ ($x_j^\pm \geq 0$) pro volné proměnné.

Příklady

Příklad 1. z minula. Vyřešte graficky duální úlohu k úloze

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min & 5x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 5, \\ & x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & -4, \\ & x_1 & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

S využitím komplementarity nalezněte optimální řešení původní úlohy.

Příklad 2. Optimalizujte výrobní plán pro výrobky V_1, V_2, V_3 vyráběné z materiálů M_1 a M_2:

	V_1	V_2	V_3	k dispozici
M_1 (kg/kg)	2	0	2	68 kg
M_2 (kg/kg)	2	2	1	60 kg
zisk (Kč/kg)	15	5	10	

Sestavte model, vyřešte graficky duální úlohu a pomocí komplementarity najděte optimální výrobní plán. Jaké jsou stínové ceny materiálů?

Příklad 3. Rozhodněte, zda má soustava $Ax = b$ nezáporné řešení, a situaci nakreslete:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Jak to dopadne, když vynecháme třetí sloupec matice A a vezmeme $b = (-2, 6)^T$?

Příklad 4. Napište Farkasovu větu pro existenci řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & \leq & 2, \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & - & 5x_5 & = & 6, \\ 3x_1 & & & + & 4x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \end{array}$$

pro $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \leq 0$, $x_4 \in \mathbb{R}$, $x_5 \in \mathbb{R}$. Úlohu vyřešte.

Příklad 5. Formulujte Farkasovu větu pro existenci řešení soustavy

(a) $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$,
(b) $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$,
(c) $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.