Cvičení VIII – řešení

Příklad 1. Dvoufázový simplexový algoritmus

Převod do standardního tvaru

První omezení má zápornou pravou stranu, vynásobíme ho -1: $-x_1 + 2x_2 \geq 6$. Přidáme doplňkové proměnné:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & & & - & s_1 & & & = & 6, \\ x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & & & + & s_2 & = & 8, \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & & & & - \ s_3 & = & 7, \end{array} \qquad x, s \geq 0.$$

Jednotkový sloupec máme jen ve druhém řádku (s_2). Do prvního a třetího řádku přidáme pomocné proměnné $z_1, z_3 \geq 0$; výchozí báze $\{z_1, s_2, z_3\}$, tj. $z_1 = 6$, $s_2 = 8$, $z_3 = 7$.

1. fáze: min $z_1 + z_3$

Cenový vektor je $(0,0,0,0,0,0,1,1)$. Poslední řádek: $c_B^T B^{-1} A - c^T$ s $c_B = (1,0,1)$, tedy součet prvního a třetího řádku minus c^T; hodnota $c_B^T b = 6 + 7 = 13$.

Start

			0	0	0	0	0	0	1	1	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	z_1	z_3	b_i/a_{ik}
1	z_1	6	−1	2	0	−1	0	0	1	0	–
0	s_2	8	1	−4	−2	0	1	0	0	0	–
1	z_3	7	0	−2	1	0	0	−1	0	1	**7**
		13	−1	0	1	−1	0	−1	0	0	

Kladné číslo dole je jen u x_3. Kladný prvek ve sloupci x_3 je jen v řádku z_3: poměr $7:1 \Rightarrow$ vystupuje z_3, pivot 1.

1. iterace

			0	0	0	0	0	0	1	1	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	z_1	z_3	b_i/a_{ik}
1	z_1	6	−1	2	0	−1	0	0	1	0	**3**
0	s_2	22	1	−8	0	0	1	−2	0	2	–
0	x_3	7	0	−2	1	0	0	−1	0	1	–
		6	−1	2	0	−1	0	0	0	−1	

Hodnota klesla na 6 (zbývá $z_1 = 6$). Dole je kladné číslo jen u x_2; kladný prvek ve sloupci x_2 je jen v řádku z_1: poměr $6:2 = 3 \Rightarrow$ vystupuje z_1, pivot 2.

2. iterace

			0	0	0	0	0	0	1	1
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	z_1	z_3
0	x_2	3	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
0	s_2	46	−3	0	0	−4	1	−2	4	2
0	x_3	13	−1	0	1	−1	0	−1	1	1
		0	0	0	0	0	0	0	−1	−1

Pomocné proměnné jsou mimo bázi a hodnota 1. fáze je **0** $\Rightarrow$ původní úloha je přípustná a máme přípustnou bázi $\{x_2, s_2, x_3\}$:

$$x = (0,\ 3,\ 13), \qquad s = (0,\ 46,\ 0).$$

(Kontrola: $0 - 6 = -6 \leq -6$, $0 - 12 - 26 = -38 \leq 8$, $-6 + 13 = 7 \geq 7$.)

2. fáze: min $6x_1 - 2x_2 - 8x_3$

Vyškrtneme sloupce z_1, z_3, nahoře dosadíme $c = (6, -2, -8, 0, 0, 0)$ a přepočítáme poslední řádek s $c_B = (-2, 0, -8)$: hodnota $-2 \cdot 3 - 8 \cdot 13 = -110$.

Start 2. fáze

			6	−2	−8	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
−2	x_2	3	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	–
0	s_2	46	−3	0	0	−4	1	−2	–
−8	x_3	13	−1	0	1	−1	0	−1	–
		−110	3	0	0	9	0	8	

Dole jsou kladná čísla u s_1 (9) i s_3 (8). Vezmeme s_1: ve sloupci s_1 **není žádný kladný prvek** ⇒ **úloha je neomezená**. Při zvětšování $s_1 = t \geq 0$ (ostatní nebazické nulové) z tabulky:

$$x_2 = 3 + \tfrac{1}{2}t, \quad s_2 = 46 + 4t, \quad x_3 = 13 + t, \qquad \text{tj. } x(t) = (0,\ 3,\ 13) + t\,(0,\ \tfrac{1}{2},\ 1),$$

$$f(x(t)) = -110 - 9t \xrightarrow{t\to\infty} -\infty.$$

Směr (ve všech proměnných $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3$) je $y = (0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1,\ 4,\ 0)$, $c^T y = -1 - 8 = -9 < 0$. Stejně tak by fungoval sloupec s_3 (dole 8, sloupec $(0, -2, -1)^T$): směr $(0, 0, 1, 0, 2, 1)$, podél něhož f klesá o 8 na jednotku. (Kladné číslo dole má i x_1 – tam by šlo o běžný krok do jiného vrcholu; k závěru o neomezenosti stačí jeden nekladný sloupec s kladným číslem dole.)

Co kdybychom maximalizovali?

$\max f = -\min(-f)$: na začátku 2. fáze dosadíme $-c = (-6, 2, 8, 0, 0, 0)$, poslední řádek změní znaménko.

Start 2. fáze pro $\min(-f)$

			−6	2	8	0	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
2	x_2	3	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	0
0	s_2	46	−3	0	0	−4	1	−2
8	x_3	13	−1	0	1	−1	0	−1
		110	−3	0	0	−9	0	−8

Dole není nic kladného ⇒ **optimum** hned v bázi z 1. fáze: $\min(-f) = 110$, tedy

$$\max\ 6x_1 - 2x_2 - 8x_3 = -110 \quad \text{v bodě } x^* = (0,\ 3,\ 13).$$

Úloha tedy má maximum, ale nemá minimum (minimalizace je neomezená). Směr y, ve kterém minimalizace utíká do $-\infty$ ($c^T y = -9$), je pro maximalizaci zhoršující, a z vrcholu $(0, 3, 13)$ už f zvětšit nejde.

Příklad 2. Nepřípustná úloha

Standardní tvar: $x_1 + x_2 + s_1 = 1,\ \ x_1 + x_2 - s_2 = 2$. Do druhého řádku přidáme pomocnou z_2, výchozí báze $\{s_1, z_2\}$, 1. fáze: $\min z_2$.

Start

			0	0	0	0	1	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	z_2	b_i/a_{ik}
0	s_1	1	1	1	1	0	0	**1**
1	z_2	2	1	1	0	−1	1	2
		2	1	1	0	−1	0	

Dole jsou jedničky u x_1 i x_2, bereme x_1. Poměry $1:1, 2:1 \Rightarrow$ vystupuje s_1.

1. iterace

			0	0	0	0	1
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	z_2
0	x_1	1	1	1	1	0	0
1	z_2	1	0	0	−1	−1	1
		1	0	0	−1	−1	0

Dole není nic kladného, optimum 1. fáze je $z_2 = 1 > 0 \Rightarrow$ **úloha nemá přípustné řešení** (pomocnou proměnnou nejde vynulovat). Je to vidět i přímo: $x_1 + x_2$ nemůže být zároveň ≤ 1 a ≥ 2.

Příklad 3. Výrobní plánování: motivace duality

(a) Duální úloha

Duální proměnné: $u_1, u_2 =$ cena (Kč/kg) suroviny S_1, S_2, $u_3 =$ cena za 2 h strojového času Z (omezení $2x_2 \le 7$ je vydělené dvěma). Kupec zaplatí za všechno $20u_1 + 15u_2 + 3{,}5u_3$ a chce co nejméně. Podnik prodá, jen pokud za suroviny a čas potřebné na 1 kg výrobku dostane aspoň tolik, kolik by výrobou vydělal:

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \min & 20u_1 & + & 15u_2 & + & 3{,}5u_3 & & & \\ \text{za podmínek} & 2u_1 & + & 6u_2 & & & \ge & 2 & (V_1:\ 2\text{ kg } S_1,\ 6\text{ kg } S_2) \\ & 5u_1 & + & u_2 & + & u_3 & \ge & 4 & (V_2:\ 5\text{ kg } S_1,\ 1\text{ kg } S_2,\ 2\text{ h}) \\ & & & & & u & \ge & 0. & \end{array}$$

Je to přesně schéma $\max c^T x,\ Ax \le b,\ x \ge 0 \ \leftrightarrow\ \min b^T u,\ A^T u \ge c,\ u \ge 0$.

Duální úlohu lze sestavit i pomocí *pomocné tabulky*: řádky odpovídají primárním omezením (a duálním proměnným), sloupce primárním proměnným (a duálním omezením). Černě je zadaná primární úloha, červeně doplňujeme podle pravidel znaménka duálních proměnných a typy duálních omezení; duální úlohu pak čteme po sloupcích, pravá strana b je její cenový vektor.

		x_1	x_2		
		≥ 0	≥ 0		
u_1	≥ 0	2	5	$\le$	20
u_2	≥ 0	6	1	$\le$	15
u_3	≥ 0	0	1	$\le$	3,5
		$\ge$	$\ge$		min
		2	4	max	

(b) Komplementarita

Dosadíme $x^* = (\frac{55}{28}, \frac{45}{14})$ do omezení:

$$2x_1 + 5x_2 = \tfrac{110}{28} + \tfrac{450}{28} = 20, \qquad 6x_1 + x_2 = \tfrac{330}{28} + \tfrac{90}{28} = 15, \qquad x_2 = \tfrac{45}{14} < \tfrac{49}{14} = 3{,}5.$$

Třetí omezení není aktivní $\Rightarrow u_3 = 0$. Protože $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$, musí být obě duální omezení splněna s rovností:

$$2u_1 + 6u_2 = 2, \quad 5u_1 + u_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1 - 3u_2, \quad 5 - 14u_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad u^* = \left(\tfrac{11}{14},\ \tfrac{1}{14},\ 0\right).$$

$u^* \geq 0$, je tedy duálně přípustné. Hodnoty:

$$f(x^*) = 2 \cdot \tfrac{55}{28} + 4 \cdot \tfrac{45}{14} = \tfrac{470}{28} = \tfrac{235}{14}, \qquad g(u^*) = 20 \cdot \tfrac{11}{14} + 15 \cdot \tfrac{1}{14} + 0 = \tfrac{235}{14} \approx 16{,}79 \text{ Kč}.$$

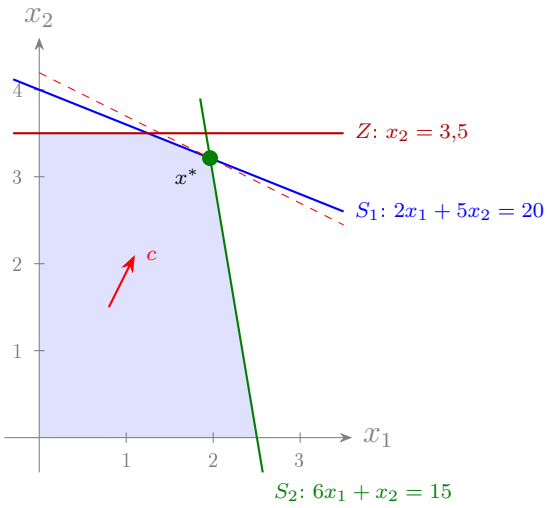
Shodují se, takže x^* i u^* jsou optimální (slabá dualita).

(c) Neaktivní omezení

Strojový čas se nevyužije celý (zbývá $3{,}5 - \frac{45}{14} = \frac{2}{7}$ h), jeho duální (stínová) cena je $u_3 = 0$: hodina navíc zisk nezvýší. Naopak kilogram suroviny S_1 navíc zvýší maximální zisk o $u_1 = \frac{11}{14} \approx 0{,}79$ Kč a kilogram S_2 o $u_2 = \frac{1}{14} \approx 0{,}07$ Kč (pro malé změny b). Totéž vypíše řešič:

```
from scipy.optimize import linprog
res = linprog(c=[-2, -4], A_ub=[[2, 5], [6, 1], [0, 1]],
              b_ub=[20, 15, 3.5], method="highs")
print(res.x, -res.fun)          # [1.96428571 3.21428571] 16.7857...
print(res.slack)                # [0.         0.         0.28571429]
print(-res.ineqlin.marginals)   # [0.78571429 0.07142857 0.        ]
```

(Řešič minimalizuje, proto zadáváme $-c$ a měníme znaménko u hodnoty i duálních cen.)



Příklad 4. Sestavení duální úlohy

Pomocná tabulka (primární úloha je max, červeně doplněno): omezení typu $\geq \to u_1 \leq 0$, rovnost $\to u_2 \in \mathbb{R}$, typ $\leq \to u_3 \geq 0$; proměnná $x_1 \geq 0 \to$ duální omezení typu $\geq$, $x_2 \in \mathbb{R} \to$ rovnost, $x_3 \leq 0 \to$ typ $\leq$.

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	$\in \mathbb{R}$	≤ 0		
u_1	≤ 0	1	-1	3	$\geq$	5
u_2	$\in \mathbb{R}$	3	3	1	$=$	35
u_3	≥ 0	0	3	1	$\leq$	5
		$\geq$	$=$	$\leq$		min
		1	8	-4	max	

Duální úlohu čteme po sloupcích:

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min & 5u_1 & + & 35u_2 & + & 5u_3 & & \\ \text{za podmínek} & u_1 & + & 3u_2 & & & \geq & 1, \\ & -u_1 & + & 3u_2 & + & 3u_3 & = & 8, \\ & 3u_1 & + & u_2 & + & u_3 & \leq & -4, \\ & u_1 & & & & & \leq & 0, \\ & & & u_2 & & & \in & \mathbb{R}, \\ & & & & & u_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Ověření optimality

$x = (10, 2, -1)$ *je přípustné:* $10 - 2 - 3 = 5 \geq 5$, $30 + 6 - 1 = 35$, $6 - 1 = 5 \leq 5$, $x_1 \geq 0$, $x_3 \leq 0$.
$u = (-2, 1, 1)$ *je přípustné:* $-2 + 3 = 1 \geq 1$, $2 + 3 + 3 = 8$, $-6 + 1 + 1 = -4 \leq -4$, $u_1 \leq 0$, $u_3 \geq 0$.
Hodnoty: $f(x) = 10 + 16 + 4 = 30$, $g(u) = -10 + 35 + 5 = 30$. Podle slabé duality je $f(x') \leq g(u) = 30$ pro každé přípustné x', takže x je optimální; stejně tak u. (Komplementarita je splněna, všechna omezení obou úloh jsou aktivní.)

Příklad 5. Duální úloha graficky a komplementarita

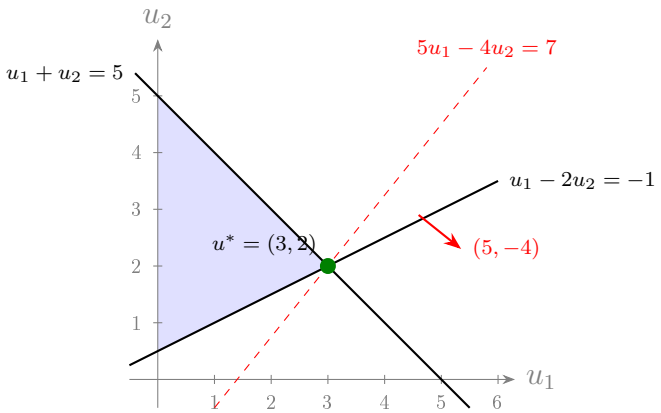
Primární úloha je minimalizační s omezeními typu $\geq$ a $x \geq 0$ (pro min jsou „přirozená“ omezení $\geq$), v pomocné tabulce tedy doplníme $u \geq 0$ a duální omezení typu $\leq$:

		x_1	x_2	x_3		
		≥ 0	≥ 0	≥ 0		
u_1	≥ 0	1	1	-1	$\geq$	5
u_2	≥ 0	1	-2	0	$\geq$	-4
		$\leq$	$\leq$	$\leq$		max
		5	-1	4	min	

Duální úloha (po sloupcích):

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 5u_1 & - & 4u_2 & & & \\ \text{za podmínek} & u_1 & + & u_2 & \leq & 5 & (x_1) \\ & u_1 & - & 2u_2 & \leq & -1 & (x_2) \\ & -u_1 & & & \leq & 4 & (x_3) \\ & u_1 & & & \geq & 0, & \\ & & & u_2 & \geq & 0. & \end{array}$$

Třetí omezení plyne z $u_1 \geq 0$. Druhé je $u_2 \geq \frac{1}{2}(u_1 + 1)$. Množina přípustných řešení je trojúhelník s vrcholy $(0, \frac{1}{2})$, $(0, 5)$, $(3, 2)$ (průsečík $u_1 + u_2 = 5$ a $u_1 - 2u_2 = -1$: $3u_2 = 6$). Hodnoty: $g(0, \frac{1}{2}) = -2$, $g(0, 5) = -20$, $g(3, 2) = 7$.



Optimum duální úlohy: $u^* = (3, 2)$, $g^* = 7$.

Komplementarita

- $u_1 = 3 > 0 \Rightarrow$ 1. primární omezení je aktivní: $x_1 + x_2 - x_3 = 5$;
- $u_2 = 2 > 0 \Rightarrow$ 2. primární omezení je aktivní: $x_1 - 2x_2 = -4$;
- 3. duální omezení: $-u_1 = -3 < 4$ není aktivní $\Rightarrow x_3 = 0$ (první dvě duální omezení jsou aktivní: $3 + 2 = 5$, $3 - 4 = -1$, o x_1, x_2 nic neříkají).

Z $x_1 + x_2 = 5$ a $x_1 - 2x_2 = -4$: $3x_2 = 9$, tedy

$$x^* = (2,\ 3,\ 0), \qquad f(x^*) = 10 - 3 + 0 = 7 = g(u^*).$$

Kontrola přípustnosti: $2 + 3 - 0 = 5 \geq 5$, $2 - 6 = -4 \geq -4$, $x \geq 0$.