Bonus: degenerace a zacyklení

Zadání

Příklad 1. Řešte graficky a simplexovou metodou úlohu

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & -3x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & - & x_2 & \leq & 2, \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\ & x_1 & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Všimněte si, co se děje ve vrcholu $(2, 0)$.

Příklad 2. Řešte simplexovou metodou úlohu[1]

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 & & \\ \text{za podmínek} & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{11}{2}x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0, \\ & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 & \leq & 0, \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1, \\ & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & & & \geq & 0, \end{array}$$

a to s pravidly: *vstupuje proměnná s největším kladným číslem v posledním řádku*, při shodě poměrů *vystupuje bazická proměnná s nejmenším indexem.*

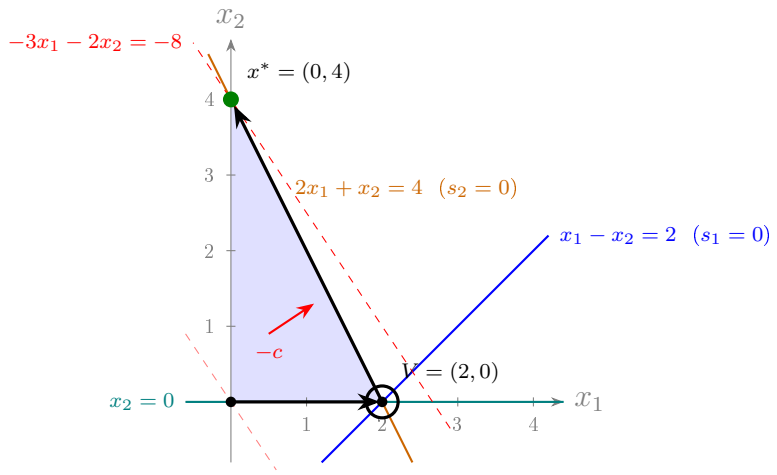
Řešení

Příklad 1. Degenerovaný vrchol v rovině

Graficky

Ve vrcholu $V = (2, 0)$ se protínají **tři** hraniční přímky: $x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 2$ a $2x_1 + x_2 = 4$ (dosaďte: $2 - 0 = 2$, $4 + 0 = 4$). V rovině stačí k určení bodu dvě, třetí je „navíc“ – takový vrchol se nazývá *degenerovaný*. Množina přípustných řešení je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 4)$ (omezení $x_1 - x_2 \leq 2$ se jí dotýká jen ve vrcholu V).

[1] V. Chvátal: *Linear Programming.* W. H. Freeman, New York, 1983, kap. 3 (Pitfalls and How to Avoid Them).



Hodnoty $z = -3x_1 - 2x_2$ ve vrcholech: $z(0,0) = 0$, $z(2,0) = -6$, $z(0,4) = -8$. Optimum je $x^* = (0,4)$, $z^* = -8$; vrchol V tedy **není** optimální.

Simplexovou metodou

Standardní tvar: $x_1 - x_2 + s_1 = 2,\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 4,\ x, s \geq 0$, výchozí báze $\{s_1, s_2\}$. Vstupující proměnnou volíme podle největšího kladného čísla dole, při shodě poměrů vybíráme řádek s menším indexem bazické proměnné.

Start, bod $(0,0)$, $z = 0$

			-3	-2	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ik}
0	s_1	2	1	-1	1	0	**2**
0	s_2	4	2	1	0	1	2
		0	3	2	0	0	

$$s_1 = 2 - x_1 + x_2$$
$$s_2 = 4 - 2x_1 - x_2$$
$$z = 0 - 3x_1 - 2x_2$$

Do báze x_1 (dole 3). Poměry jsou **stejné**: $2:1 = 2$ i $4:2 = 2$ – při zvětšování x_1 se s_1 i s_2 vynulují současně (v obrázku: posun po ose x_1 narazí na obě přímky naráz). To je první známka degenerace. Volíme s_1 ven, pivot 1.

1. iterace, bod $(2,0)$, $z = -6$

			-3	-2	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ik}
-3	x_1	2	1	-1	1	0	–
0	s_2	0	0	3	-2	1	**0**
		-6	0	5	-3	0	

$$x_1 = 2 + x_2 - s_1$$
$$s_2 = 0 - 3x_2 + 2s_1$$
$$z = -6 - 5x_2 + 3s_1$$

Báze $\{x_1, s_2\}$, ale bazická proměnná s_2 má hodnotu 0: **degenerované bazické řešení** (nulové jsou tři proměnné x_2, s_1, s_2 místo dvou – tři přímky jedním bodem). Do báze jde x_2 (dole 5). Kladný prvek ve sloupci x_2 je jen v řádku s_2, poměr $0:3 = \mathbf{0} \Rightarrow s_2$ ven, pivot 3. Krok má nulovou délku.

2. iterace, opět bod $(2,0)$, $z=-6$

			-3	-2	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ik}
-3	x_1	2	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	**6**
-2	x_2	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	–
		-6	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	

$$x_1 = 2 - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_2$$
$$x_2 = 0 + \tfrac{2}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_2$$
$$z = -6 - \tfrac{1}{3}s_1 + \tfrac{5}{3}s_2$$

Degenerovaný krok: báze se změnila na $\{x_1, x_2\}$ (s $x_2 = 0$), ale bod ani hodnota účelové funkce ne. V obrázku jsme se nepohnuli – jen jsme místo dvojice přímek $x_2 = 0$, $s_1 = 0$ „popsali“ vrchol V dvojicí $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Teď vstupuje s_1 (dole $\frac{1}{3}$), kladný prvek je jen v řádku x_1: poměr $2 : \frac{1}{3} = 6 \Rightarrow x_1$ ven, pivot $\frac{1}{3}$.

3. iterace, bod $(0,4)$, $z=-8$

			-3	-2	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	6	3	0	1	1
-2	x_2	4	2	1	0	1
		-8	-1	0	0	-2

$$s_1 = 6 - 3x_1 - s_2$$
$$x_2 = 4 - 2x_1 - s_2$$
$$z = -8 + x_1 + 2s_2$$

V posledním řádku není nic kladného $\Rightarrow$ **optimum** $x^* = (0,4)$, $s^* = (6,0)$, $z^* = -8$, stejně jako graficky.

Cesta: $(0,0) \to (2,0) \to (2,0) \to (0,4)$, tj. tři iterace, z toho jedna „naprázdno“.

Poznámky

Jiná volba při shodě poměrů. Kdybychom ve startovní tabulce nechali vystoupit s_2 (pivot 2), dostali bychom

			-3	-2	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ik}
0	s_1	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	–
-3	x_1	2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	**4**
		-6	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	

Bod je opět $(2,0)$, degenerovaná je teď proměnná $s_1 = 0$. Kladný prvek ve sloupci x_2 je ale jen v řádku x_1 (poměr $2 : \frac{1}{2} = 4$), takže se hned posuneme do $(0,4)$ – optimum po dvou iteracích bez degenerovaného kroku.

Zacyklení. V degenerovaném vrcholu může simplexová metoda měnit báze, aniž by se posunula a aniž by se změnila hodnota z. V tomto malém příkladu to skončí po jednom kroku, ve větších úlohách se ale může stát, že se po několika degenerovaných krocích vrátíme k *téže bázi* a výpočet se točí v kruhu donekonečna (klasický příklad uvedl Beale, 1955; viz Příklad 2). Pomůže např. *Blandovo pravidlo*: ze všech kandidátů na vstup (kladné číslo dole) i na výstup (nejmenší poměr) vybíráme vždy proměnnou s nejmenším indexem – pak k zacyklení dojít nemůže.

Proč v rovině vzniká degenerace. V $\mathbb{R}^2$ určují vrchol dvě přímky. Prochází-li vrcholem třetí, je jedna z nerovností v okolí vrcholu zbytečná (zde $x_1 - x_2 \le 2$) a některá bazická proměnná vyjde nulová.

Příklad 2. Zacyklení simplexové metody (Chvátal)

Proč zrovna takhle

Malé rovinné příklady (jako ten s degenerovaným vrcholem $(2,0)$) s běžnými pravidly necyklí – známé příklady zacyklení potřebují víc proměnných. Tady máme čtyři proměnné a tři doplňkové s_1, s_2, s_3; cyklus probíhá jen v prvních dvou omezeních, třetí zaručuje, že úloha má optimum. Obrázek proto nakreslit nejde: degenerovaný vrchol je bod $x = 0 \in \mathbb{R}^4$, ve kterém se kromě čtyř nadrovin $x_j = 0$ protínají ještě $s_1 = 0$ a $s_2 = 0$ (pravé strany prvních dvou omezení jsou nulové).

Převedeme na minimalizaci: min $-10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$, tj. $c = (-10, 57, 9, 24, 0, 0, 0)$, doplňkové proměnné $s_1, s_2, s_3 \geq 0$, výchozí báze $\{s_1, s_2, s_3\}$.

Simplexová metoda: šest kroků a zpět na začátek

V tabulkách je červeně vstupující proměnná a modře pivot. Pravá strana prvních dvou řádků je *pořád nulová*: všechny poměry jsou 0, posuny mají nulovou délku.

Start – báze $\{s_1, s_2, s_3\}$, $x = 0$, $z = 0$

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
0	s_1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	**0**
0	s_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
0	s_3	1	1	0	0	0	0	0	1	1
		0	10	-57	-9	-24	0	0	0	

Vstupuje x_1 (dole 10), vystupuje s_1 (poměry 0 ve více řádcích, bereme nejmenší index).

1. iterace – báze $\{x_1, s_2, s_3\}$, $x = 0$, $z = 0$

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
-10	x_1	0	1	-11	-5	18	2	0	0	–
0	s_2	0	0	4	2	-8	-1	1	0	**0**
0	s_3	1	0	11	5	-18	-2	0	1	$\frac{1}{11}$
		0	0	53	41	-204	-20	0	0	

Vstupuje x_2 (dole 53), vystupuje s_2.

2. iterace – báze $\{x_1, x_2, s_3\}$, $x = 0$, $z = 0$

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
-10	x_1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{4}$	$\frac{11}{4}$	0	**0**
57	x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
0	s_3	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	$-\frac{11}{4}$	1	–
		0	0	0	$\frac{29}{2}$	-98	$-\frac{27}{4}$	$-\frac{53}{4}$	0	

Vstupuje x_3 (dole $\frac{29}{2}$), vystupuje x_1 (poměry 0 ve více řádcích, bereme nejmenší index).

3. iterace – báze $\{x_3, x_2, s_3\}$, $x = 0$, $z = 0$

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
9	x_3	0	2	0	1	-8	$-\frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	–
57	x_2	0	-1	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	**0**
0	s_3	1	1	0	0	0	0	0	1	–
		0	-29	0	0	18	15	-93	0	

Vstupuje x_4 (dole 18), vystupuje x_2.

4. iterace – báze $\{x_3, x_4, s_3\}$, $x = 0$, $z = 0$

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
9	x_3	0	-2	4	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	**0**
24	x_4	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	0
0	s_3	1	1	0	0	0	0	0	1	–
		0	-20	-9	0	0	$\frac{21}{2}$	$-\frac{141}{2}$	0	

Vstupuje s_1 (dole $\frac{21}{2}$), vystupuje x_3 (poměry 0 ve více řádcích, bereme nejmenší index).

5. iterace – báze $\{s_1, x_4, s_3\}$, $x = 0$, $z = 0$

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
0	s_1	0	-4	8	2	0	1	-9	0	–
24	x_4	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	**0**
0	s_3	1	1	0	0	0	0	0	1	–
		0	22	-93	-21	0	0	24	0	

Vstupuje s_2 (dole 24), vystupuje x_4.

6. iterace – báze $\{s_1, s_2, s_3\}$, $x = 0$, $z = 0$

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
0	s_1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	9	1	0	0	**0**
0	s_2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	0
0	s_3	1	1	0	0	0	0	0	1	1
		0	10	-57	-9	-24	0	0	0	

Stejná tabulka jako na startu – báze $\{s_1, s_2, s_3\}$, poslední řádek $(10, -57, -9, -24, 0, 0, 0)$. Výpočet by se odsud opakoval stále dokola.

Přehled cyklu. Báze se střídají

$$\{s_1, s_2\} \to \{x_1, s_2\} \to \{x_1, x_2\} \to \{x_3, x_2\} \to \{x_3, x_4\} \to \{s_1, x_4\} \to \{s_1, s_2\}$$

(proměnná $s_3 = 1$ je bazická pořád). Bod $x = 0$ ani hodnota $z = 0$ se nezmění, simplexová metoda se *nikdy* nezastaví, přestože úloha optimum má.

Blandovo pravidlo: konec cyklu

Blandovo pravidlo: ze všech proměnných s kladným číslem dole vstupuje ta s **nejmenším indexem**, při shodě poměrů vystupuje bazická proměnná s nejmenším indexem (pořadí $x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3$). Prvních pět kroků je stejných, rozdíl nastane v tabulce po 5. iteraci (báze $\{s_1, x_4, s_3\}$): dole jsou kladná čísla 22 u x_1 a 24 u s_2. Největší je 24 (zacyklení), Bland ale vybere x_1.

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
0	s_1	0	-4	8	2	0	1	-9	0	–
24	x_4	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	1	0	**0**
0	s_3	1	1	0	0	0	0	0	1	1
		0	22	-93	-21	0	0	24	0	

Vstupuje x_1, vystupuje x_4 (opět krok délky 0).

			-10	57	9	24	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
0	s_1	0	0	-4	-2	8	1	-1	0	–
-10	x_1	0	1	-3	-1	2	0	2	0	–
0	s_3	1	0	3	1	-2	0	-2	1	**1**
		0	0	-27	1	-44	0	-20	0	

Vstupuje x_3, nejmenší poměr je v řádku s_3 a je **kladný**: konečně se posuneme.

			-10	57	9	24	0	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3
0	s_1	2	0	2	0	4	1	-5	2
-10	x_1	1	1	0	0	0	0	0	1
9	x_3	1	0	3	1	-2	0	-2	1
		-1	0	-30	0	-42	0	-18	-1

V posledním řádku není nic kladného $\Rightarrow$ optimum $x^* = (1, 0, 1, 0)$, $s^* = (2, 0, 0)$, $\min = -1$, tj. $\max\ 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 = 1$.

Shrnutí. Zacyklení vyžaduje degenerovaný vrchol (nulové pravé strany $\Rightarrow$ kroky délky 0) a „nešťastná“ pravidla výběru. Blandovo pravidlo (nebo jiné ochrany, např. lexikografické pravidlo) zaručí, že se žádná báze nezopakuje, a metoda skončí po konečně mnoha krocích. V praxi je zacyklení vzácné.