Cvičení VIII

Teorie

Dvoufázová metoda (když nemáme přípustnou výchozí bázi):

(1) Úlohu převedeme do standardního tvaru $Ax = b$, $x \geq 0$, a řádky se zápornou pravou stranou vynásobíme -1, aby $b \geq 0$.
(2) Do řádků, ve kterých nemáme jednotkový sloupec (typicky rovnosti a omezení typu $\geq$), přidáme *pomocné* proměnné $z_i \geq 0$.
(3) *1. fáze:* simplexovou metodou řešíme $\min \sum_i z_i$; výchozí bázi tvoří pomocné (a doplňkové) proměnné. Je-li optimum kladné, původní úloha *nemá přípustné řešení.* Je-li nulové, dostaneme přípustnou bázi původní úlohy (zůstane-li v bázi pomocná proměnná s hodnotou 0, vyměníme ji za původní proměnnou).
(4) *2. fáze:* vyškrtneme sloupce pomocných proměnných, dosadíme původní cenový vektor c, přepočítáme poslední řádek ($c_B^T B^{-1} b$ a $c_B^T B^{-1} A - c^T$) a pokračujeme simplexovou metodou.

Maximalizace. $\max c^T x = -\min(-c^T x)$: řešíme minimalizaci s cenovým vektorem $-c$ (poslední řádek tabulky změní znaménko), nalezenou hodnotu nakonec vynásobíme -1.

Dualita. Ke každé úloze LP patří úloha *duální*; pro úlohu v kanonickém tvaru

$$\begin{aligned} f(x) = c^T x &\to \max \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g(u) = b^T u &\to \min \\ A^T u &\geq c \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

Obecně (i-tému omezení odpovídá duální proměnná u_i, proměnné x_j odpovídá j-té duální omezení):

primární úloha (max)		duální úloha (min)	
i-té omezení	$\leq b_i$	$u_i \geq 0$	
	$\geq b_i$	$u_i \leq 0$	
	$= b_i$	$u_i \in \mathbb{R}$	
proměnná	$x_j \geq 0$	j-té omezení	$\geq c_j$
	$x_j \leq 0$		$\leq c_j$
	$x_j \in \mathbb{R}$		$= c_j$

Pro minimalizační úlohu čteme tabulku zprava doleva (duální úloha k duální je původní úloha).

- *Slabá dualita:* pro přípustná x, u platí $c^T x \leq b^T u$. Je-li $c^T x = b^T u$, jsou obě optimální.
- *Silná dualita:* má-li jedna z úloh optimum, má ho i druhá a $\max f = \min g$.
- *Komplementarita:* přípustná x, u jsou optimální právě tehdy, když $u_i\,(b_i - a_i^T x) = 0$ pro všechna i a $x_j\left((A^T u)_j - c_j\right) = 0$ pro všechna j (neaktivní omezení $\Rightarrow$ nulová duální proměnná).

Příklady

Příklad 1. Dvoufázový simplexový algoritmus. Řešte úlohu

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min & 6x_1 & - & 2x_2 & - & 8x_3 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & - & 2x_2 & & & \leq & -6, \\ & x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & \leq & 8, \\ & & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 7, \\ & x_1 & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

Co kdybychom maximalizovali?

Příklad 2. Pomocí dvoufázové metody ukažte, že úloha

$$\begin{array}{rrcrcr} \min & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & + & x_2 & \geq & 2, \\ & x_1 & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

nemá přípustné řešení.

Příklad 3. Výrobní plánování z 1. cvičení. Podnik vyrábí výrobky V_1, V_2 ze surovin S_1, S_2 a pomocí strojového času Z:

$$\begin{array}{rrcrcrl} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & (S_1) \\ & 6x_1 & + & x_2 & \leq & 15 & (S_2) \\ & & & x_2 & \leq & 3{,}5 & (Z) \\ & x_1 & & & \geq & 0, & \\ & & & x_2 & \geq & 0. & \end{array}$$

(a) Sestavte a interpretujte duální úlohu (kupec chce od podniku odkoupit suroviny i strojový čas).
(b) Optimum primární úlohy je $x^* = (\frac{55}{28}, \frac{45}{14})$. Pomocí komplementarity dopočtěte optimum duální úlohy a ověřte, že hodnoty obou úloh jsou stejné.
(c) Které omezení není aktivní a jakou má duální (stínovou) cenu?

Příklad 4. Napište duální úlohu k úloze

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max & x_1 & + & 8x_2 & - & 4x_3 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 5, \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 35, \\ & & & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 5, \\ & x_1 & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & \in & \mathbb{R}, \\ & & & & & x_3 & \leq & 0. \end{array}$$

Ověřte, že $x = (10, 2, -1)$ a $u = (-2, 1, 1)$ jsou optimální řešení primární a duální úlohy.

Příklad 5. Vyřešte graficky duální úlohu k úloze

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min & 5x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \geq & 5, \\ & x_1 & - & 2x_2 & & & \geq & -4, \\ & x_1 & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

S využitím komplementarity nalezněte optimální řešení původní úlohy.