Cvičení VII – řešení

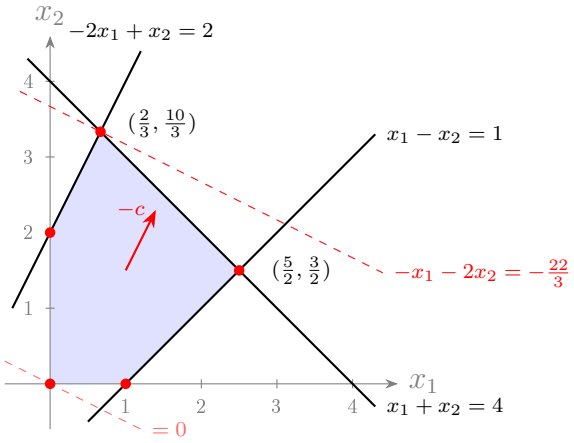
Příklad 1. Graficky, přímou a simplexovou metodou

(a) Graficky

Omezení: $x_2 \le 4 - x_1$, $x_2 \le 2 + 2x_1$, $x_2 \ge x_1 - 1$, $x \ge 0$. Vrcholy:

- $(0,0)$, $(0,2)$ (průsečík $x_1 = 0$ a $x_2 = 2 + 2x_1$) a $(1,0)$ (průsečík $x_2 = 0$ a $x_2 = x_1 - 1$),
- průsečík $x_2 = x_1 - 1$ s $x_1 + x_2 = 4$: $2x_1 - 1 = 4$, tedy $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$,
- průsečík $x_2 = 2 + 2x_1$ s $x_1 + x_2 = 4$: $3x_1 + 2 = 4$, tedy $(\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$.

Minimalizujeme, vrstevnice $-x_1 - 2x_2 = k$ tedy posouváme ve směru $-c = (1,2)$.



Hodnoty $f = -x_1 - 2x_2$ ve vrcholech: $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = -1$, $f(0,2) = -4$, $f(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{5}{2} - 3 = -\frac{11}{2}$, $f(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}) = -\frac{2}{3} - \frac{20}{3} = -\frac{22}{3}$, tedy $x^* = (\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$, $f(x^*) = -\frac{22}{3}$.

(b) Přímou metodou

Standardní tvar s doplňkovými proměnnými $s_1, s_2, s_3 \ge 0$, proměnné $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c = (-1, -2, 0, 0, 0)^T,$$

$m = 3$, $n = 5$, bází je $\binom{5}{3} = 10$. Každá odpovídá dvojici nulových proměnných, tj. průsečíku dvou z přímek $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$. Například $L = \{x_1, x_2, s_3\}$ ($s_1 = s_2 = 0$): $x_1 + x_2 = 4$, $-2x_1 + x_2 = 2$, odečtením $3x_1 = 2$, tedy $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$ a $s_3 = 1 - x_1 + x_2 = \frac{11}{3}$.

báze L	nulové	$x(L) = (x_1, x_2, s_1, s_2, s_3)$	přípustné?	$c^T x(L)$
$\{s_1, s_2, s_3\}$	x_1, x_2	$(0, 0, 4, 2, 1)$	ano	0
$\{x_2, s_2, s_3\}$	x_1, s_1	$(0, 4, 0, -2, 5)$	ne	
$\{x_2, s_1, s_3\}$	x_1, s_2	$(0, 2, 2, 0, 3)$	ano	-4
$\{x_2, s_1, s_2\}$	x_1, s_3	$(0, -1, 5, 3, 0)$	ne	
$\{x_1, s_2, s_3\}$	x_2, s_1	$(4, 0, 0, 10, -3)$	ne	
$\{x_1, s_1, s_3\}$	x_2, s_2	$(-1, 0, 5, 0, 2)$	ne	
$\{x_1, s_1, s_2\}$	x_2, s_3	$(1, 0, 3, 4, 0)$	ano	-1
$\{x_1, x_2, s_3\}$	s_1, s_2	$(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, \frac{11}{3})$	ano	$-\frac{22}{3}$
$\{x_1, x_2, s_2\}$	s_1, s_3	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0)$	ano	$-\frac{11}{2}$
$\{x_1, x_2, s_1\}$	s_2, s_3	$(-3, -4, 11, 0, 0)$	ne	

Všech 10 matic A_L je regulárních, přípustných bází je 5 – vrcholy pětiúhelníku. Krajní směry: pro všech $\binom{5}{4} = 5$ voleb K má řešení $A_K \eta = 0$ smíšená znaménka (např. $K = \{x_1, x_2, s_1, s_2\}$: $\eta = (1, 1, -2, 1)$), tedy $\operatorname{extd} M = \emptyset$ a M je omezená. Optimum je ve vrcholu s nejmenší hodnotou: $L = \{x_1, x_2, s_3\}$, $x^* = (\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, \frac{11}{3})$, $c^T x^* = -\frac{22}{3}$.

Všimněme si, že *sousední* vrcholy se liší výměnou jedné bazické proměnné, např. $\{s_1, s_2, s_3\} \to \{x_1, s_1, s_2\}$ (x_1 dovnitř, s_3 ven). Přesně tak postupuje simplexová metoda.

(c) Simplexovou metodou

Protože $b = (4, 2, 1)^T \geq 0$, je výchozí báze $\{s_1, s_2, s_3\}$ přípustná: $x = (0, 0)$, $s = b$, $z = 0$. Vedle každé tabulky jsou tytéž rovnice (bazické proměnné vyjádřené pomocí nebazických); v tabulce je červeně vstupující proměnná a modře pivot.

Start

			-1	-2	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
0	s_1	4	1	1	1	0	0	4
0	s_2	2	-2	1	0	1	0	$-$
0	s_3	1	1	-1	0	0	1	$\mathbf{1}$
		0	1	2	0	0	0	

$$s_1 = 4 - x_1 - x_2$$
$$s_2 = 2 + 2x_1 - x_2$$
$$s_3 = 1 - x_1 + x_2$$
$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

Start, bod $(0, 0)$, $z = 0$. Dole jsou kladná čísla u x_1 i x_2 (v rovnici pro z mají záporné koeficienty), volíme x_1. Poměry: $4 : 1 = 4$, $1 : 1 = 1$ (v řádku s_2 je $-2 < 0$, s_2 s růstem x_1 roste) $\Rightarrow$ vystupuje s_3, pivot 1. Řádkové úpravy: řádek s_3 se stává řádkem x_1; k řádku s_1 přičteme jeho (-1)-násobek, k řádku s_2 dvojnásobek, k poslednímu (-1)-násobek. V rovnicích: z rovnice pro s_3 vyjádříme $x_1 = 1 - s_3 + x_2$ a dosadíme do ostatních.

1. iterace

			-1	-2	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
0	s_1	3	0	2	1	0	-1	$\mathbf{\frac{3}{2}}$
0	s_2	4	0	-1	0	1	2	$-$
-1	x_1	1	1	-1	0	0	1	$-$
		-1	0	3	0	0	-1	

$$s_1 = 3 - 2x_2 + s_3$$
$$s_2 = 4 + x_2 - 2s_3$$
$$x_1 = 1 + x_2 - s_3$$
$$z = -1 - 3x_2 + s_3$$

Bod $(1,0)$, $z=-1$. Kladné číslo dole je jen u x_2 (3). Kladný prvek ve sloupci x_2 je jen v řádku s_1: poměr $3:2=\frac{3}{2} \Rightarrow$ vystupuje s_1, pivot 2. Řádek s_1 vydělíme dvěma, k řádkům s_2 a x_1 ho přičteme, k poslednímu přičteme jeho (-3)-násobek.

2. iterace

			-1	-2	0	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ik}
-2	x_2	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–
0	s_2	$\frac{11}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{\frac{11}{3}}$
-1	x_1	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	5
		$-\frac{11}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	

$$x_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}s_1 + \tfrac{1}{2}s_3$$
$$s_2 = \tfrac{11}{2} - \tfrac{1}{2}s_1 - \tfrac{3}{2}s_3$$
$$x_1 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}s_1 - \tfrac{1}{2}s_3$$
$$z = -\tfrac{11}{2} + \tfrac{3}{2}s_1 - \tfrac{1}{2}s_3$$

Bod $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, $z=-\frac{11}{2}$. Kladné číslo dole je u s_3 $(\frac{1}{2})$. Poměry: $\frac{11}{2}:\frac{3}{2}=\frac{11}{3}$, $\frac{5}{2}:\frac{1}{2}=5 \Rightarrow$ vystupuje s_2, pivot $\frac{3}{2}$. Řádek s_2 vynásobíme $\frac{2}{3}$, k řádku x_2 přičteme jeho $\frac{1}{2}$-násobek, k řádku x_1 a k poslednímu $(-\frac{1}{2})$-násobek.

3. iterace

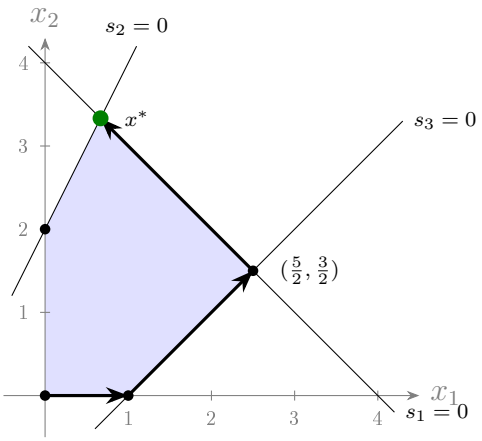
			-1	-2	0	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
-2	x_2	$\frac{10}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	s_3	$\frac{11}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
-1	x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
		$-\frac{22}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

$$x_2 = \tfrac{10}{3} - \tfrac{2}{3}s_1 - \tfrac{1}{3}s_2$$
$$s_3 = \tfrac{11}{3} - \tfrac{1}{3}s_1 - \tfrac{2}{3}s_2$$
$$x_1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3}s_1 + \tfrac{1}{3}s_2$$
$$z = -\tfrac{22}{3} + \tfrac{5}{3}s_1 + \tfrac{1}{3}s_2$$

Bod $(\frac{2}{3},\frac{10}{3})$, $z=-\frac{22}{3}$. V posledním řádku není nic kladného (v rovnici pro z jsou u s_1, s_2 kladné koeficienty) $\Rightarrow$ **optimum**.

$$x^* = \left(\tfrac{2}{3},\tfrac{10}{3}\right), \quad s^* = \left(0,0,\tfrac{11}{3}\right), \qquad z^* = -\tfrac{22}{3}$$

– stejný vrchol jako minule ($\max 2x_1+4x_2 = \frac{44}{3} = -2z^*$). Simplexová metoda prošla vrcholy $(0,0) \to (1,0) \to (\frac{5}{2},\frac{3}{2}) \to (\frac{2}{3},\frac{10}{3})$ (tři iterace, cesta je v obrázku).



Příklad 2. Neomezená úloha

Standardní tvar: $-2x_1 + x_2 + s_1 = 2$, $x_1 - x_2 + s_2 = 1$, výchozí báze $\{s_1, s_2\}$.

Start

			-1	-2	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ik}
0	s_1	2	-2	1	1	0	$-$
0	s_2	1	$\boxed{1}$	-1	0	1	$\mathbf{1}$
		0	$\boxed{1}$	2	0	0	

$$s_1 = 2 + 2x_1 - x_2$$
$$s_2 = 1 - x_1 + x_2$$
$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

Volíme x_1 (dole 1). Kladný prvek ve sloupci x_1 je jen v řádku $s_2 \Rightarrow$ vystupuje s_2, pivot 1.

1. iterace

			-1	-2	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	4	0	-1	1	2
-1	x_1	1	1	-1	0	1
		-1	0	$\boxed{3}$	0	-1

$$s_1 = 4 + x_2 - 2s_2$$
$$x_1 = 1 + x_2 - s_2$$
$$z = -1 - 3x_2 + s_2$$

Bod $(1, 0)$, $z = -1$. Dole je kladné číslo 3 u x_2, ale **ve sloupci x_2 není nic kladného**. V rovnicích: zvětšíme-li x_2 o $t \geq 0$ (a s_2 necháme nulové), je $s_1 = 4 + t$, $x_1 = 1 + t$ – žádná bazická proměnná se nevynuluje a $z = -1 - 3t \to -\infty$. Úloha je **neomezená**.

Směr dostaneme z tabulky: 1 na pozici x_2, na pozice bazických proměnných čísla ze sloupce x_2 s opačným znaménkem (s_1: 1, x_1: 1), nebazická s_2: 0:

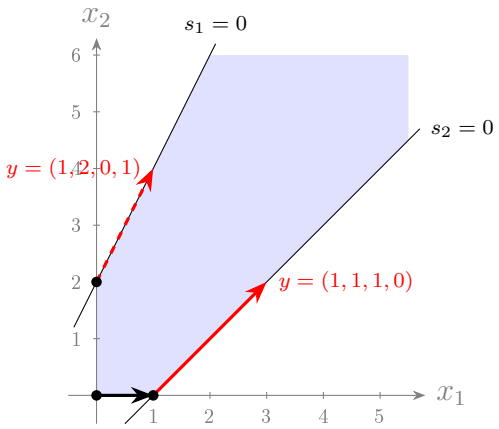
$$y = (x_1, x_2, s_1, s_2) = (1, 1, 1, 0), \qquad Ay = \begin{pmatrix} -2+1+1 \\ 1-1+0 \end{pmatrix} = 0, \qquad c^T y = -1 - 2 = -3 < 0,$$

přesně podle kritéria z minulého cvičení; -3 je opačná hodnota čísla dole.

Jiná cesta. Zvolíme-li na začátku x_2 (vystupuje s_1), dostaneme

			-1	-2	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2
-2	x_2	2	-2	1	1	0
0	s_2	3	-1	0	1	1
		-4	$\boxed{5}$	0	-2	0

a ve sloupci x_1 jsou jen záporná čísla: směr $y = (1, 2, 0, 1)$, $c^T y = -1 - 4 = -5 < 0$. Oba směry $(1, 1)$ a $(1, 2)$ v rovině (x_1, x_2) jsou krajní směry množiny přípustných řešení.



Příklad 3. Více optimálních řešení

Standardní tvar: $-x_1 + x_2 + s_1 = 1$, $x_2 + s_2 = 3$, výchozí báze $\{s_1, s_2\}$, $c = (2, -2, 0, 0)$.

Start

			2	−2	0	0	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ik}
0	s_1	1	−1	1	1	0	**1**
0	s_2	3	0	1	0	1	3
		0	−2	2	0	0	

$$s_1 = 1 + x_1 - x_2$$
$$s_2 = 3 - x_2$$
$$z = 0 + 2x_1 - 2x_2$$

Dole je kladné číslo jen u x_2 (2). Poměry $1:1 = 1$, $3:1 = 3 \Rightarrow$ vystupuje s_1, pivot 1.

1. iterace

			2	−2	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2
−2	x_2	1	−1	1	1	0
0	s_2	2	1	0	−1	1
		−2	0	0	−2	0

$$x_2 = 1 + x_1 - s_1$$
$$s_2 = 2 - x_1 + s_1$$
$$z = -2 + 2s_1$$

Bod $(0, 1)$, $z = -2$. V posledním řádku není nic kladného $\Rightarrow$ **optimum**. U nebazické proměnné x_1 je ale dole **nula**: zvětšením x_1 se z nezmění. Provedeme-li přesto výměnu (x_1 do báze, poměr jen v řádku s_2: $2:1$, vystupuje s_2), dostaneme

			2	−2	0	0
c_B	x_B	$B^{-1}b$	x_1	x_2	s_1	s_2
−2	x_2	3	0	1	0	1
2	x_1	2	1	0	−1	1
		−2	0	0	−2	0

$$x_2 = 3 - s_2$$
$$x_1 = 2 + s_1 - s_2$$
$$z = -2 + 2s_1$$

tj. bod $(2, 3)$ se stejnou hodnotou $z = -2$. Optimální je celá úsečka

$$\operatorname{conv}\{(0,1),\ (2,3)\} = \{(t,\ 1+t) : t \in [0,2]\}, \qquad z^* = -2.$$

Graficky. Množina je neomezená (vpravo), vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$. Vrstevnice $2x_1 - 2x_2 = k$ jsou rovnoběžné s hranou $x_2 = x_1 + 1$, proto je optimum na celé hraně.

Přímou metodou. $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = (1, 3)^T$:

- $L = \{1, 2\}$: $(2, 3, 0, 0)$, $z = -2$; $L = \{2, 4\}$: $(0, 1, 0, 2)$, $z = -2$; $L = \{3, 4\}$: $(0, 0, 1, 3)$, $z = 0$;
- $L = \{1, 4\}$: $(-1, 0, 0, 3)$ a $L = \{2, 3\}$: $(0, 3, -2, 0)$ jsou nepřípustné; $A_{\{1,3\}}$ je singulární.
- Krajní směr: $K = \{1, 2, 3\}$ i $\{1, 3, 4\}$ dávají $y = (1, 0, 1, 0)$, $c^T y = 2 > 0$; ostatní K dávají smíšená znaménka.

Optimum -2 ve dvou krajních bodech $\Rightarrow$ optimální je úsečka mezi nimi – souhlasí.

