Cvičení VII

Teorie

Úlohu LP uvažujeme ve standardním tvaru $\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má plnou řádkovou hodnost. Označme B čtvercovou matici obdrženou výběrem určité báze (sloupce A příslušné bazickým proměnným), x_B bazické proměnné a c_B příslušný cenový vektor.

Simplexová tabulka má v každé iteraci toto schéma:

		c^T	
		x^T	
c_B	x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}A$
		$c_B^T B^{-1}b$	$c_B^T B^{-1}A - c^T$

Řádky tabulky jsou koeficienty soustavy $x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$ (bazické proměnné vyjádřené pomocí nebazických), sloupec $B^{-1}b$ obsahuje hodnoty bazických proměnných a $c_B^T B^{-1}b$ je hodnota účelové funkce v aktuálním vrcholu. V posledním řádku jsou čísla $\Delta_j = c_B^T B^{-1}a_j - c_j$; platí $z = c_B^T B^{-1}b - \sum_{j\notin B} \Delta_j x_j$.

Jedna iterace (změna báze = přechod do sousedního vrcholu):

(1) *Vstupující proměnná:* nebazická x_k s $\Delta_k > 0$ (porušené simplexové kritérium); jejím zvětšením se hodnota účelové funkce sníží.
(2) *Vystupující proměnná:* řádek r s nejmenším poměrem $\left(B^{-1}b\right)_i / a_{ik}$ mezi řádky s $a_{ik} > 0$ – bazická proměnná, která se při zvětšování x_k vynuluje jako první. Prvek a_{rk} je *pivot*.
(3) *Nová tabulka:* pivotní řádek vydělíme pivotem, od ostatních řádků (včetně posledního) odečteme jeho vhodný násobek tak, aby ve sloupci x_k vznikl jednotkový vektor.

Konec algoritmu.

- $\Delta_j \leq 0$ pro všechna $j \Rightarrow$ aktuální bazické řešení je *optimální*. Je-li $\Delta_j = 0$ pro nějakou nebazickou proměnnou, může existovat i jiné optimální řešení.
- $\Delta_k > 0$, ale ve sloupci nad ním není žádné kladné číslo $\Rightarrow$ úloha je *neomezená*; směr poklesu dostaneme tak, že dáme 1 na pozici x_k a čísla ze sloupce s opačným znaménkem na pozice bazických proměnných.
- Simplexová metoda potřebuje přípustnou výchozí bázi (pro $Ax \leq b$, $b \geq 0$ ji tvoří doplňkové proměnné). Jinak použijeme *dvoufázovou metodu*: přidáme pomocné proměnné $z \geq 0$, $Ax + z = b$, a řešíme $\min \sum_i z_i$. Je-li optimum kladné, úloha nemá přípustné řešení.

Příklady

Příklad 1. Uvažujme úlohu z minulého cvičení (Př. 4(a)) ve tvaru

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Řešte ji

(a) graficky,
(b) přímou metodou,
(c) simplexovou metodou; každou iteraci zapište i pomocí rovnic a zakreslete cestu do obrázku.

Příklad 2. Z úlohy v Př. 1 odstraňte první omezení:

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{za podmínek} & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Řešte simplexovou metodou. Poznáte z tabulky, že je úloha neomezená? Najděte směr, ve kterém účelová funkce neomezeně klesá, a ověřte kritérium $c^T y < 0$ z minulého cvičení.

Příklad 3. Řešte simplexovou metodou (a pro kontrolu graficky a přímou metodou):

$$\begin{array}{rrcrcl} \min & 2x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{za podmínek} & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1, \\ & & & x_2 & \leq & 3, \\ & x_1 & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$