Cvičení VI – řešení

Standardní tvar

Příklad 1. Převod na standardní tvar

Postupujeme po krocích podle pravidel z teorie.

1. *Maximalizace → minimalizace:* $\max(-3x_1 + 5x_2) = -\min(3x_1 - 5x_2)$.
2. *Nekladná proměnná:* $x_2 \le 0$ nahradíme $\hat{x}_2 = -x_2 \ge 0$. Všude dosadíme $x_2 = -\hat{x}_2$: účelová funkce $3x_1 - 5x_2 = 3x_1 + 5\hat{x}_2$, omezení

$$5x_1 - 4\hat{x}_2 + x_3 \ge 2, \qquad 8x_1 - \hat{x}_2 - 2x_3 = 1, \qquad -2\hat{x}_2 + x_3 \le -2.$$

3. *Volná proměnná:* $x_3 \in \mathbb{R}$ zapíšeme jako $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, $x_3^+, x_3^- \ge 0$.
4. *Nerovnosti → rovnosti:* do první ($\ge$) odečteme $x_4 \ge 0$, do třetí ($\le$) přičteme $x_5 \ge 0$.

Výsledek:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\min & 3x_1 & + & 5\hat{x}_2 & & & & & & & & \\
\text{za podm.} & 5x_1 & - & 4\hat{x}_2 & + & x_3^+ & - & x_3^- & - & x_4 & = & 2, \\
& 8x_1 & - & \hat{x}_2 & - & 2x_3^+ & + & 2x_3^- & & & = & 1, \\
& & - & 2\hat{x}_2 & + & x_3^+ & - & x_3^- & + & x_5 & = & -2,
\end{array}$$

$$x_1, \hat{x}_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \ge 0,$$

tj. $\min\{c^T x : Ax = b,\ x \ge 0\}$ s $x = (x_1, \hat{x}_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5)^T$ a

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad c = (3, 5, 0, 0, 0, 0)^T.$$

Pokud chceme $b \ge 0$ (bude se hodit u simplexové metody), vynásobíme třetí rovnici -1: $2\hat{x}_2 - x_3^+ + x_3^- - x_5 = 2$. Zpětně: $x_2 = -\hat{x}_2$, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ a optimální hodnota původní úlohy je *minus* optimální hodnota nové úlohy.

Tvar nerovností $\min\{c^T x : Ax \ge b,\ x \ge 0\}$: po krocích 1–3 rovnost nahradíme dvojicí $\ge$, $\le$ a nerovnosti $\le$ vynásobíme -1:

$$\begin{aligned}
\min\ & 3x_1 + 5\hat{x}_2 \\
\text{za podmínek}\ & 5x_1 - 4\hat{x}_2 + x_3^+ - x_3^- \ge 2, \\
& 8x_1 - \hat{x}_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- \ge 1, \\
& -8x_1 + \hat{x}_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- \ge -1, \\
& 2\hat{x}_2 - x_3^+ + x_3^- \ge 2, \\
& x_1, \hat{x}_2, x_3^+, x_3^- \ge 0.
\end{aligned}$$

Pro kontrolu (numericky, např. `linprog`): obě úlohy mají optimum v $x = (\frac{26}{9}, -\frac{47}{9}, \frac{76}{9})$, původní úloha s hodnotou $-\frac{313}{9}$, standardní tvar s hodnotou $+\frac{313}{9}$.

Přímá metoda

Proč právě $\operatorname{card}(L) = m$**?** Bod $x \in M$ má n neznámých a splňuje m rovnic $Ax = b$. Aby byl určen jednoznačně, potřebujeme dalších $n-m$ rovnic; ty dostaneme tak, že $n-m$ proměnných položíme rovno nule. Zbude m proměnných (báze L) a čtvercová soustava $A_L x_L = b$.

- Má-li $x \in M$ víc než m kladných složek, jsou příslušné sloupce A lineárně závislé: existuje $d \neq 0$ s $Ad = 0$ a $d_i = 0$ mimo $S^+(x)$. Pak $x \pm \varepsilon d \in M$ pro malé $\varepsilon > 0$ a x je středem úsečky v M – *není* krajní bod.
- U krajních směrů hledáme $y \geq 0$, $Ay = 0$. Směr je určen jen až na násobek (y a $2y$ je tentýž směr), takže jednu složku můžeme zvolit, např. $y_1 = 1$. Spolu s $Ay = 0$ je to $m + 1$ rovnic, a proto stejnou úvahou dostaneme $\operatorname{card}(K) = m + 1$.

Ve dvou původních proměnných je to vidět i geometricky: každá podmínka $x_i = 0$ je přímka (osa nebo hranice omezení) a báze odpovídá průsečíku dvou takových přímek.

Příklad 2. Přímá metoda pro úlohu z minula

Standardní tvar (doplňkové proměnné $x_3, x_4 \geq 0$):

$$\begin{aligned} &\min\ 3x_1 - x_2 \\ &\text{za podmínek } 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ &\qquad -4x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$m = 2$, $n = 4$, $\mathrm{h}(A) = 2$.

Krajní body: $\operatorname{card}(L) = 2$**, tj.** $\binom{4}{2} = 6$ **možností**

Pro každou volbu L položíme zbylé dvě proměnné rovny nule a řešíme soustavu $A_L x_L = b$.

- $L = \{1, 2\}$ ($x_3 = x_4 = 0$): $2x_1 + x_2 = 2$, $-4x_1 + 2x_2 = 6$, $\det A_L = 4 + 4 = 8$. Z první $x_2 = 2 - 2x_1$, dosadíme: $-4x_1 + 4 - 4x_1 = 6$, $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{5}{2}$. $x(L) = (-\frac{1}{4}, \frac{5}{2}, 0, 0)$ – **nepřípustné**.
- $L = \{1, 3\}$ ($x_2 = x_4 = 0$): $2x_1 - x_3 = 2$, $-4x_1 = 6$, $\det A_L = -4$. $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = 2x_1 - 2 = -5$. $x(L) = (-\frac{3}{2}, 0, -5, 0)$ – **nepřípustné**.
- $L = \{1, 4\}$ ($x_2 = x_3 = 0$): $2x_1 = 2$, $-4x_1 + x_4 = 6$, $\det A_L = 2$. $x_1 = 1$, $x_4 = 10$. $x(L) = (1, 0, 0, 10) \geq 0$ – **krajní bod**.
- $L = \{2, 3\}$ ($x_1 = x_4 = 0$): $x_2 - x_3 = 2$, $2x_2 = 6$, $\det A_L = 2$. $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. $x(L) = (0, 3, 1, 0) \geq 0$ – **krajní bod**.
- $L = \{2, 4\}$ ($x_1 = x_3 = 0$): $x_2 = 2$, $2x_2 + x_4 = 6$, $\det A_L = 1$. $x_2 = 2$, $x_4 = 2$. $x(L) = (0, 2, 0, 2) \geq 0$ – **krajní bod**.
- $L = \{3, 4\}$ ($x_1 = x_2 = 0$): $-x_3 = 2$, $x_4 = 6$, $\det A_L = -1$. $x(L) = (0, 0, -2, 6)$ – **nepřípustné**.

Krajní směry: $\operatorname{card}(K) = 3$**, tj.** $\binom{4}{3} = 4$ **možností**

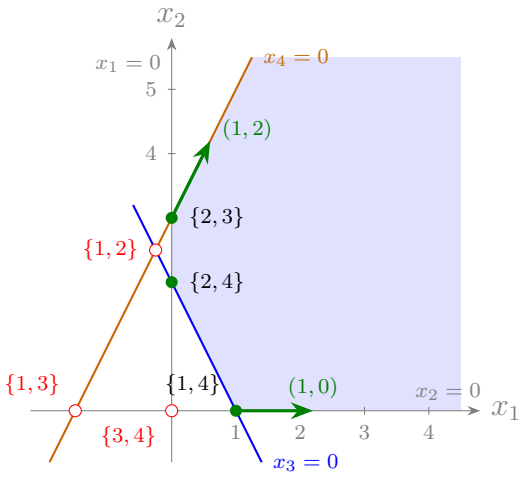
Řešíme $A_K \eta = 0$ (všechny A_K mají hodnost 2, takže řešení je určeno až na násobek).

- $K = \{1, 2, 3\}$: $2a + b - c = 0$, $-4a + 2b = 0 \Rightarrow b = 2a$, $c = 4a$; $\eta = (1, 2, 4)$, $y = (1, 2, 4, 0) \geq 0$ – **krajní směr**.
- $K = \{1, 2, 4\}$: $2a + b = 0$, $-4a + 2b + d = 0 \Rightarrow b = -2a$, $d = 8a$; $y = (1, -2, 0, 8)$ – smíšená znaménka, **není**.

- $K = \{1,3,4\}$: $2a - c = 0$, $-4a + d = 0 \Rightarrow y = (1,0,2,4) \geq 0$ – **krajní směr**.
- $K = \{2,3,4\}$: $b - c = 0$, $2b + d = 0 \Rightarrow y = (0,1,1,-2)$ – **není**.

Po normování extd $M = \left\{\frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4,0),\ \frac{1}{\sqrt{21}}(1,0,2,4)\right\}$ a

$$M = \operatorname{conv}\{(1,0,0,10),\ (0,3,1,0),\ (0,2,0,2)\} + \operatorname{pos}\{(1,2,4,0),\ (1,0,2,4)\}.$$



Na obrázku jsou všechny bazické body v souřadnicích (x_1, x_2): báze L znamená, že dvě proměnné mimo L jsou nulové, tedy průsečík dvou přímek. Zelené jsou přípustné (vrcholy), červené nepřípustné.

Řešení úlohy

$c^T(1,2,4,0) = 3 - 2 = 1 > 0$ a $c^T(1,0,2,4) = 3 > 0$, takže funkce v žádném krajním směru neklesá a optimum je v krajním bodě:

$$c^T(1,0,0,10) = 3, \qquad c^T(0,3,1,0) = -3, \qquad c^T(0,2,0,2) = -2.$$

$$x^* = (0,3,1,0), \qquad c^T x^* = -3,$$

tj. v původních proměnných $(x_1, x_2) = (0,3)$ – stejně jako graficky v minulém cvičení. Doplňková proměnná $x_3 = 2x_1 + x_2 - 2 = 1$ je rezerva prvního omezení (není aktivní), $x_4 = 0$: druhé omezení je aktivní.

Příklad 3. Rozklad množiny v $\mathbb{R}^4$

$A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $b = (-2,-1)^T$, $c = (2,2,-1,-2)^T$, $m = 2$, $n = 4$, $\mathrm{h}(A) = 2$.

Krajní body: $\binom{4}{2} = 6$ **bází**

- $L = \{1,2\}$: $2x_1 - x_2 = -2$, $-x_1 + 2x_2 = -1$, $\det A_L = 4 - 1 = 3$. Z druhé $x_1 = 2x_2 + 1$, dosadíme: $4x_2 + 2 - x_2 = -2$, $x_2 = -\frac{4}{3}$, $x_1 = -\frac{5}{3}$ – **nepřípustné**.
- $L = \{1,3\}$: $2x_1 - x_3 = -2$, $-x_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_3 = 4$; $x(L) = (1,0,4,0)$ – **krajní bod**.
- $L = \{1,4\}$: $2x_1 = -2$, $-x_1 - x_4 = -1 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_4 = 2$ – **nepřípustné**.
- $L = \{2,3\}$: $-x_2 - x_3 = -2$, $2x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{5}{2}$ – **nepřípustné**.
- $L = \{2,4\}$: $-x_2 = -2$, $2x_2 - x_4 = -1 \Rightarrow x_2 = 2$, $x_4 = 5$; $x(L) = (0,2,0,5)$ – **krajní bod**.
- $L = \{3,4\}$: $-x_3 = -2$, $-x_4 = -1 \Rightarrow x(L) = (0,0,2,1)$ – **krajní bod**.

Krajní směry: $\binom{4}{3} = 4$ **volby** K

- $K = \{1,2,3\}$: $2a - b - c = 0,\ -a + 2b = 0 \Rightarrow a = 2b,\ c = 3b;\ y = (2,1,3,0) \geq 0$ – **krajní směr**.
- $K = \{1,2,4\}$: $2a - b = 0,\ -a + 2b - d = 0 \Rightarrow b = 2a,\ d = 3a;\ y = (1,2,0,3) \geq 0$ – **krajní směr**.
- $K = \{1,3,4\}$: $2a - c = 0,\ -a - d = 0 \Rightarrow y = (1,0,2,-1)$ – **není**.
- $K = \{2,3,4\}$: $-b - c = 0,\ 2b - d = 0 \Rightarrow y = (0,1,-1,2)$ – **není**.

$$M = \operatorname{conv}\{(1,0,4,0),\ (0,2,0,5),\ (0,0,2,1)\} + \operatorname{pos}\{(2,1,3,0),\ (1,2,0,3)\},$$
$$\operatorname{extd} M = \left\{\tfrac{1}{\sqrt{14}}(2,1,3,0),\ \tfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,0,3)\right\}.$$

Řešení úlohy

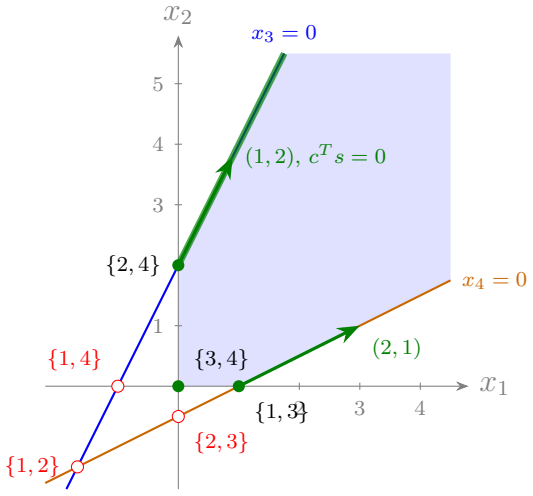
Směry: $c^T(2,1,3,0) = 4+2-3 = 3 > 0,\ c^T(1,2,0,3) = 2+4-6 = 0$. Úloha je tedy omezená a ve druhém směru je účelová funkce konstantní. Krajní body:

$$c^T(1,0,4,0) = 2-4 = -2, \qquad c^T(0,2,0,5) = 4-10 = -6, \qquad c^T(0,0,2,1) = -2-2 = -4.$$

Nejmenší hodnotu má $x^* = (0,2,0,5)$. Protože $c^T s^* = 0$ pro $s^* = (1,2,0,3)$, je optimálních řešení nekonečně mnoho:

$$x^* + ts^* = (t,\ 2+2t,\ 0,\ 5+3t), \quad t \geq 0, \qquad c^T x = -6.$$

Obrázek. Z rovnic vyjádříme $x_3 = 2x_1 - x_2 + 2$, $x_4 = -x_1 + 2x_2 + 1$, takže M je (v proměnných x_1, x_2) množina $\{x_1, x_2 \geq 0,\ x_2 \leq 2x_1 + 2,\ x_2 \geq \frac{1}{2}(x_1 - 1)\}$ a účelová funkce je $2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2x_1 - x_2 - 4$.



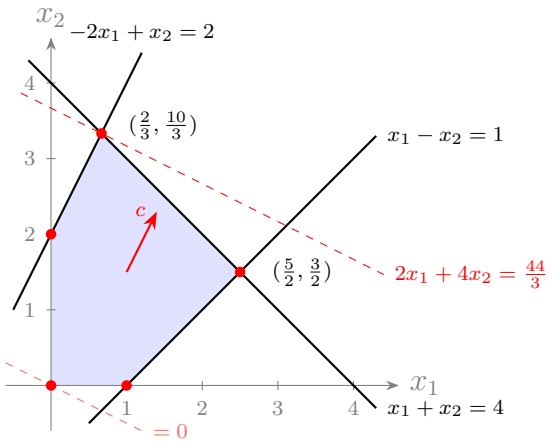
Zvýrazněná polopřímka z bodu $(0,2)$ ve směru $(1,2)$ leží na přímce $x_3 = 0$ a je to přesně množina optimálních řešení (vrstevnice $2x_1 - x_2 - 4 = -6$ je právě přímka $x_2 = 2x_1 + 2$).

Příklad 4. Graficky i přímou metodou

Graficky (a) max $2x_1 + 4x_2$

Omezení: $x_2 \le 4 - x_1$, $x_2 \le 2 + 2x_1$, $x_2 \ge x_1 - 1$, $x \ge 0$. Vrcholy:

- $(0,0)$, $(0,2)$ (průsečík $x_1 = 0$ a $x_2 = 2 + 2x_1$) a $(1,0)$ (průsečík $x_2 = 0$ a $x_2 = x_1 - 1$),
- průsečík $x_2 = x_1 - 1$ s $x_1 + x_2 = 4$: $2x_1 - 1 = 4$, tedy $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$,
- průsečík $x_2 = 2 + 2x_1$ s $x_1 + x_2 = 4$: $3x_1 + 2 = 4$, tedy $(\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$.



Hodnoty ve vrcholech: $f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 2$, $f(0,2) = 8$, $f(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}) = 5 + 6 = 11$, $f(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{40}{3} = \frac{44}{3}$.

$$x^* = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{10}{3}\right), \qquad f(x^*) = \tfrac{44}{3} = 14\tfrac{2}{3}.$$

Graficky (b) min $2x_1 + 4x_2$

Vrstevnici posouváme ve směru $-c$; na stejné množině je minimum ve vrcholu $(0,0)$ s hodnotou 0 (všechny ostatní vrcholy mají kladnou hodnotu).

Graficky (c) max $x_1 + x_2$

Vrstevnice $x_1 + x_2 = k$ jsou rovnoběžné s omezením $x_1 + x_2 \le 4$. Maximum 4 se nabývá v obou vrcholech $(\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ a $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$, a tedy na celé hraně mezi nimi:

$$x^* = (t,\ 4 - t), \quad t \in \left[\tfrac{2}{3},\ \tfrac{5}{2}\right], \qquad f(x^*) = 4.$$

Úloha má nekonečně mnoho optimálních řešení – všechna jsou konvexními kombinacemi dvou optimálních vrcholů.

Přímou metodou: báze

Doplňkové proměnné $x_3, x_4, x_5 \ge 0$ (stejné pro všechny tři účelové funkce, mění se jen c):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$m = 3$, $n = 5$. Bází je $\binom{5}{3} = 10$; každá odpovídá dvojici nulových proměnných, tj. průsečíku dvou z přímek $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ ($x_1 + x_2 = 4$), $x_4 = 0$ ($-2x_1 + x_2 = 2$), $x_5 = 0$ ($x_1 - x_2 = 1$). Například pro $L = \{1, 2, 5\}$ ($x_3 = x_4 = 0$): $x_1 + x_2 = 4$, $-2x_1 + x_2 = 2$; odečtením $3x_1 = 2$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{10}{3}$ a ze třetí rovnice $x_5 = 1 - x_1 + x_2 = \frac{11}{3}$.

L	nulové	$x(L)$	přípustné?	$2x_1+4x_2$	x_1+x_2
$\{3,4,5\}$	x_1, x_2	$(0,0,4,2,1)$	ano	0	0
$\{2,4,5\}$	x_1, x_3	$(0,4,0,-2,5)$	ne		
$\{2,3,5\}$	x_1, x_4	$(0,2,2,0,3)$	ano	8	2
$\{2,3,4\}$	x_1, x_5	$(0,-1,5,3,0)$	ne		
$\{1,4,5\}$	x_2, x_3	$(4,0,0,10,-3)$	ne		
$\{1,3,5\}$	x_2, x_4	$(-1,0,5,0,2)$	ne		
$\{1,3,4\}$	x_2, x_5	$(1,0,3,4,0)$	ano	2	1
$\{1,2,5\}$	x_3, x_4	$(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, \frac{11}{3})$	ano	$\frac{44}{3}$	4
$\{1,2,4\}$	x_3, x_5	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0)$	ano	11	4
$\{1,2,3\}$	x_4, x_5	$(-3,-4,11,0,0)$	ne		

Všech 10 matic A_L je regulárních. Přípustných bází je 5 – přesně vrcholy pětiúhelníku z obrázku.

Krajní směry: $\binom{5}{4} = 5$ **voleb** K

- $K = \{1,2,3,4\}$: $a+b+c=0$, $-2a+b+d=0$, $a-b=0 \Rightarrow y = (1,1,-2,1,0)$,
- $K = \{1,2,3,5\}$: $a+b+c=0$, $-2a+b=0$, $a-b+e=0 \Rightarrow y = (1,2,-3,0,1)$,
- $K = \{1,2,4,5\}$: $a+b=0$, $-2a+b+d=0$, $a-b+e=0 \Rightarrow y = (1,-1,0,3,-2)$,
- $K = \{1,3,4,5\}$: $a+c=0$, $-2a+d=0$, $a+e=0 \Rightarrow y = (1,0,-1,2,-1)$,
- $K = \{2,3,4,5\}$: $b+c=0$, $b+d=0$, $-b+e=0 \Rightarrow y = (0,1,-1,-1,1)$.

Žádné y nemá všechny složky stejného znaménka, tedy $\operatorname{extd} M = \emptyset$ a M je omezená: $M = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} M)$. (Odpovídá to tomu, že pětiúhelník z grafického řešení je omezený.)

Přímou metodou: řešení

Krajní směry nejsou, takže stačí porovnat hodnoty ve vrcholech (sloupce tabulky).

(a) $\max\ 2x_1+4x_2 = -\min(-2x_1-4x_2)$: největší hodnota $\frac{44}{3}$ pro $L=\{1,2,5\}$, $x^* = (\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, \frac{11}{3})$. Doplňkové proměnné $x_3 = x_4 = 0$: první dvě omezení jsou aktivní, $x_5 = \frac{11}{3} > 0$: třetí není.

(b) $\min\ 2x_1+4x_2$: nejmenší hodnota 0 pro $L=\{3,4,5\}$, $x^* = (0,0,4,2,1)$.

(c) $\max\ x_1+x_2$: hodnota 4 ve *dvou* bázích $\{1,2,5\}$ a $\{1,2,4\}$, tedy optimální je celá úsečka $\operatorname{conv}\{(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0, \frac{11}{3}),\ (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{11}{2}, 0)\}$ – hrana $x_1+x_2=4$ (tj. $x_3=0$).

Výsledky souhlasí s grafickým řešením.