Cvičení VI

Teorie

Standardní tvar úlohy LP. Úlohu LP budeme uvažovat v kompaktním maticovém zápise

$$\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

a množinu přípustných řešení označíme $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$.

Převod na standardní tvar.

- $\max f(x) = -\min\big(-f(x)\big)$, tj. maximalizaci převedeme na minimalizaci $-f$,
- $a^T x \leq \beta \ \rightsquigarrow\ a^T x + s = \beta,\ s \geq 0$ (doplňková proměnná),
- $a^T x \geq \beta \ \rightsquigarrow\ a^T x - s = \beta,\ s \geq 0$,
- $x_j \leq 0 \ \rightsquigarrow\ \hat{x}_j = -x_j \geq 0$,
- $x_j \in \mathbb{R} \ \rightsquigarrow\ x_j = x_j^+ - x_j^-,\ x_j^+, x_j^- \geq 0$.

Tvar nerovností $\min\{c^T x : Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ dostaneme podobně: rovnost nahradíme dvojicí nerovností $\geq$ a $\leq$, nerovnost $\leq$ vynásobíme -1.

Definice 3.11. *Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, která má plnou řádkovou hodnost. Vyberme množinu indexů $L \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, aby obsahovala právě m různých položek. Vezměme příslušné sloupce matice A a sestavme z nich čtvercovou matici $A_L = (A_{j,i})$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \in L$.*

- *Pokud je matice A_L regulární, pak říkáme, že L je* bází *úlohy.*
- *Je-li L báze, pak k ní přísluší $x(L) \in \mathbb{R}^n$ jednoznačně určené podmínkami $Ax(L) = b$ a $x_i(L) = 0$ pro všechna $i \notin L$. Bod $x(L)$ nazýváme* bazické řešení *příslušné k bázi L.*
- *Je-li L báze a $x(L) \geq 0$, mluvíme o* přípustné bázi.
- *Je-li L báze a $x(L)$ je optimálním řešením úlohy, mluvíme o* optimální bázi.

Lemma 3.12. *Nechť L je báze úlohy. Potom příslušné bazické řešení je určeno jednoznačně a je tvaru*

$$x(L)_L = (A_L)^{-1} b, \qquad x(L)_i = 0 \quad \text{pro } i \notin L.$$

Věta 3.13. *Pokud matice A má plnou řádkovou hodnost, pak množina* $\mathrm{ext}(M)$ *je rovna množině všech přípustných bazických řešení.*

Návod (krajní body): projdeme všechny volby $L \subset \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{card}(L) = m$. Pokud A_L není regulární, přejdeme k další volbě. Jinak řešíme $A_L \xi = b$; je-li $\xi \geq 0$, je $x(L)$ s $x(L)_L = \xi$, $x(L)_{L^c} = 0$ krajní bod M.

Definice 3.13.A. *Pro $y \in \mathbb{R}^n$ označíme množinu indexů jeho kladných složek $S^+(y) = \{i : y_i > 0\}$.*

Věta 3.14. *Pokud hodnost matice A je m, pak platí*

$$\mathrm{extd}(M) \subseteq \big\{y \in \mathrm{direct}(M) : \mathrm{card}\big(S^+(y)\big) \leq m + 1,\ \|y\| = 1\big\}.$$

Vztah platí pouze jako inkluze: všechny krajní směry v množině vpravo leží, ale ne každý její prvek je krajním směrem. Rovnost dostaneme až s podmínkou na hodnost v následujícím návodu.

Návod (krajní směry): projdeme všechny volby $K \subset \{1, \dots, n\}$, $\operatorname{card}(K) = m + 1$. Pokud A_K nemá plnou řádkovou hodnost, přejdeme k další volbě. Jinak najdeme netriviální řešení $A_K \eta = 0$ (je určeno až na násobek). Lze-li volit $\eta \geq 0$, je $y(K)$ s $y(K)_K = \eta / \|\eta\|$, $y(K)_{K^c} = 0$ krajní směr M.

Řešení úlohy přímou metodou. Platí $M = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} M) + \operatorname{pos}(\operatorname{extd} M)$.

(1) Neexistuje-li žádný krajní bod, úloha nemá přípustné řešení.
(2) Pokud v nějakém krajním směru y má účelová funkce zápornou hodnotu ($c^T y < 0$), úloha nemá řešení – funkce neomezeně klesá v tomto směru.
(3) Jinak je jedním z optimálních řešení některý z krajních bodů – ten s nejmenší hodnotou účelové funkce.
   - Pokud je takových bodů více, je řešením i úsečka (konvexní obal) mezi nimi.
   - Pokud má navíc účelová funkce nulovou hodnotu pro nějaký krajní směr s^*, úloha má nekonečně mnoho řešení tvaru $x^* + ts^*$, $t \geq 0$, kde x^* je krajní bod s nejmenší hodnotou účelové funkce.

Příklady

Příklad 1. Převeďte úlohu do standardního tvaru (případně do tvaru nerovností):

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \max & -3x_1 & + & 5x_2 & & & & \\ \text{za podmínek} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \geq & 2, \\ & 8x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1, \\ & & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -2, \\ & x_1 & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & \leq & 0, \\ & & & & & x_3 & \in & \mathbb{R}. \end{array}$$

Příklad 2. Řešte přímou metodou následující úlohu a porovnejte s výsledkem z minulého cvičení (grafické řešení):

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \min & 3x_1 & - & x_2 & & & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2, & & \\ & -4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6, & & \\ & x_1 & & & \geq & 0, & & \\ & & & x_2 & \geq & 0. & & \end{array}$$

Příklad 3. Rozložte množinu přípustných řešení $M \subset \mathbb{R}^4$ následující úlohy a úlohu vyřešte přímou metodou:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & \\ \text{za podmínek} & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & -2, \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & -1, \\ & x_1 & & & & & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & & & & & \geq & 0, \\ & & & & & x_3 & & & \geq & 0, \\ & & & & & & & x_4 & \geq & 0. \end{array}$$

Příklad 4. (a) Řešte graficky i přímou metodou následující úlohu:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{za podmínek} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4, \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2, \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1, \\ & x_1 & & & \geq & 0, \\ & & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

(b) Řešte stejnou úlohu, ale účelovou funkci minimalizujte.
(c) Řešte stejnou úlohu s účelovou funkcí max $x_1 + x_2$.