Cvičení V – řešení

Konvexní funkce

Postup je u všech funkcí stejný: spočteme první a druhé parciální derivace, sestavíme Hessovu matici a pomocí Sylvestrova kritéria rozhodneme o její (semi)definitnosti na celém (otevřeném, konvexním) definičním oboru.

Příklad 1. Které funkce jsou konvexní

(a) $f = x^2 + y\log y^2$ **na** $\{x \geq 1,\ y \geq 1\}$**: konvexní**

Pro $y > 0$ je $\log y^2 = 2\log y$, takže $f = x^2 + 2y\log y$. Pracujeme na otevřené konvexní množině $D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$, která danou množinu obsahuje.

$$f_x = 2x, \qquad f_y = 2\log y + 2y \cdot \frac{1}{y} = 2\log y + 2,$$

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = 0, \qquad f_{yy} = \frac{2}{y}, \qquad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/y \end{pmatrix}.$$

Minory: $2 > 0$, $\frac{2}{y} > 0$, $\det H_f = \frac{4}{y} > 0$. Hessián je pozitivně definitní na D, f je na D (ostře) konvexní, a tedy i na konvexní podmnožině $\{x \geq 1, y \geq 1\}$.

(b) $f = -\log(2x + y)$**,** $x, y > 0$**: konvexní**

Označme $u = 2x + y > 0$; $u_x = 2$, $u_y = 1$.

$$f_x = -\frac{2}{u}, \quad f_y = -\frac{1}{u}, \qquad f_{xx} = \frac{4}{u^2}, \quad f_{xy} = \frac{2}{u^2}, \quad f_{yy} = \frac{1}{u^2}, \qquad H_f = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minory: $\frac{4}{u^2} > 0$, $\frac{1}{u^2} > 0$, $\det H_f = \frac{4}{u^4} - \frac{4}{u^4} = 0$. Všechny jsou ≥ 0, $H_f \succeq 0$, f je konvexní (ne ostře – na přímkách $2x + y =$ konst. je konstantní). *Jinak:* $-\log t$ je konvexní a složení konvexní funkce s afinní funkcí $2x + y$ je konvexní.

(c) $f = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz$**: (ostře) konvexní**

$$f_x = 2x + 2y, \qquad f_y = 4y + 2x + 2z, \qquad f_z = 6z + 2y, \qquad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vedoucí minory:

$$D_1 = 2, \qquad D_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4,$$

$$D_3 = 2\,(4 \cdot 6 - 2 \cdot 2) - 2\,(2 \cdot 6 - 2 \cdot 0) + 0 = 40 - 24 = 16 \quad \text{(rozvoj podle 1. řádku).}$$

Všechny jsou kladné, $H_f \succ 0$, f je ostře konvexní.

(d) $f = x^2 + y^2 + z^2 + 4xz$**: není konvexní**

$$f_x = 2x + 4z, \qquad f_y = 2y, \qquad f_z = 2z + 4x, \qquad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vedoucí minory řádu 1 a 2 vypadají dobře: $D_1 = 2 > 0,\ D_2 = \det(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}) = 4 > 0$. Pro pozitivní semidefinitnost ale musíme zkontrolovat *všechny* hlavní minory, tedy i ten pro indexy $\{1, 3\}$ (1. a 3. řádek a sloupec):

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 16 = -12 < 0.$$

H_f tedy není pozitivně semidefinitní a f **není konvexní**. Totéž potvrzuje $D_3 = \det H_f = 2\,(2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) - 0 + 4\,(0 \cdot 0 - 2 \cdot 4) = 8 - 32 = -24 < 0$. Přímo: $f(t, 0, -t) = 2t^2 - 4t^2 = -2t^2$ je konkávní.

Poučení: kdybychom se dívali jen na vedoucí minory D_1, D_2, problém v minoru $\{1, 3\}$ bychom přehlédli.

Konvexní množiny

Příklad 2. Množina z písemky

Doplněním na čtverce

$$x^2 + 3x + 4y^2 - 6y = \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} + 4\left(y - \tfrac{3}{4}\right)^2 - \tfrac{9}{4} \le 12 \iff \left(x + \tfrac{3}{2}\right)^2 + 4\left(y - \tfrac{3}{4}\right)^2 \le \tfrac{33}{2},$$

což je elipsa. Funkce $q = x^2 + 3x + 4y^2 - 6y$ má $q_{xx} = 2$, $q_{yy} = 8$, $q_{xy} = 0$, Hessián $\operatorname{diag}(2, 8) \succ 0$, takže $\{q \le 12\}$ je úrovňová množina konvexní funkce. Funkce $|x| + y^2$ je součtem konvexních funkcí $|x|$ a y^2, její úrovňová množina $\{\cdot \le 5\}$ je konvexní. $\{y \ge 0\}$ je polorovina. Množina je průnikem tří konvexních množin, a je tedy **konvexní**.

Příklad 3. Úrovňové množiny (z minula)

(a) $f = e^x + e^y$: $f_{xx} = e^x > 0$, $f_{yy} = e^y > 0$, $f_{xy} = 0$, $H_f \succ 0$, f je konvexní, $\{f \le 10\}$ je její úrovňová množina – **konvexní**.

(b) $\{x^2 + y^2 \le 5\}$ je úrovňová množina konvexní funkce (kruh), druhá množina je z (a); průnik dvou konvexních množin je **konvexní**.

Grafické řešení LP

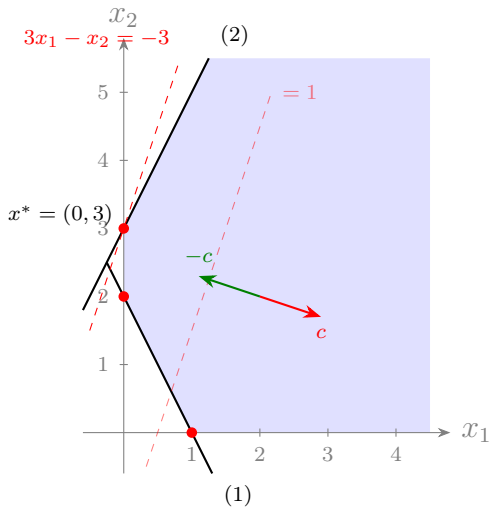
Příklad 4. Grafické řešení: účelová funkce $3x_1 - x_2$

(a) min $3x_1 - x_2$

Omezení převedeme do tvaru pro x_2:

$$(1)\ x_2 \geq 2 - 2x_1, \qquad (2)\ x_2 \leq 2x_1 + 3, \qquad (3)\ x_1 \geq 0, \qquad (4)\ x_2 \geq 0.$$

Množina přípustných řešení je neomezená s vrcholy $(1,0)$, $(0,2)$, $(0,3)$ a krajními směry $(1,0)$ a $(1,2)$ (hrana podél přímky (2) je rovnoběžná s $(1,2)$).



Vrstevnice $3x_1 - x_2 = k$ jsou přímky $x_2 = 3x_1 - k$; pro minimalizaci posouváme ve směru $-c = (-3, 1)$, tj. nahoru doleva. Poslední bod množiny je vrchol $(0,3)$. Kontrola ve vrcholech: $f(1,0) = 3$, $f(0,2) = -2$, $f(0,3) = -3$. Úloha je omezená, protože pro oba krajní směry je $c^T(1,0) = 3 \geq 0$ a $c^T(1,2) = 1 \geq 0$.

$$x^* = (0,3), \qquad f(x^*) = -3.$$

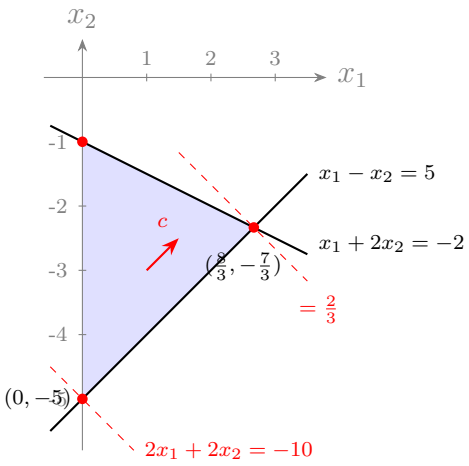
(b) max $3x_1 - x_2$

Posouváme ve směru $c = (3, -1)$. Body $(t, 0)$ jsou přípustné pro každé $t \geq 1$ a $f(t,0) = 3t \to \infty$. Úloha je **neomezená** – pro maximalizaci rozhoduje znaménko $c^T s > 0$ u krajního směru $s = (1,0)$.

Příklad 5. Grafické řešení: účelová funkce $2x_1 + 2x_2$

(a) min $2x_1 + 2x_2$

Omezení: $x_2 \geq x_1 - 5$, $x_2 \leq -1 - \frac{x_1}{2}$, $x_1 \geq -1$ (nadbytečné vzhledem k $x_1 \geq 0$), $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$ (nadbytečné vzhledem k druhé podmínce). Množina je trojúhelník s vrcholy $(0,-1)$, $(0,-5)$ a průsečíkem $x_1 - x_2 = 5$, $x_1 + 2x_2 = -2$: $x_1 + 2(x_1 - 5) = -2$, tedy $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = -\frac{7}{3}$.



Vrstevnice $x_1 + x_2 = \text{konst.}$ posouváme ve směru $-c = (-2, -2)$, tj. dolů doleva. Hodnoty ve vrcholech: $f(0, -1) = -2$, $f(0, -5) = -10$, $f(\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}) = \frac{2}{3}$.

$$x^* = (0, -5), \qquad f(x^*) = -10.$$

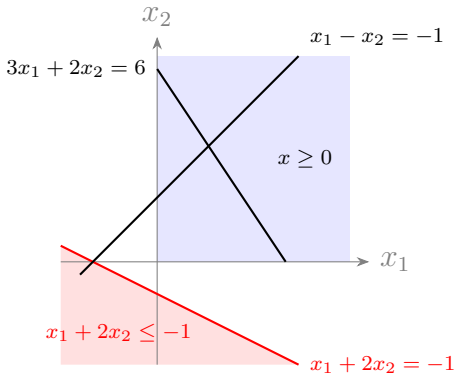
(b) max $2x_1 + 2x_2$

Množina je omezená (trojúhelník), maximum se nabývá ve vrcholu s největší hodnotou:

$$x^* = \left(\tfrac{8}{3},\ -\tfrac{7}{3}\right), \qquad f(x^*) = \tfrac{16}{3} - \tfrac{14}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

Příklad 6. Přípustná množina je prázdná

Podmínka $-x_1 - 2x_2 \geq 1$ znamená $x_1 + 2x_2 \leq -1$. Pro $x_1, x_2 \geq 0$ je ale $x_1 + 2x_2 \geq 0 > -1$. Polorovina $\{x_1 + 2x_2 \leq -1\}$ leží celá mimo první kvadrant.



Úloha **nemá přípustné řešení**, a tedy ani optimum (zbylá omezení ani účelovou funkci není třeba zkoumat).