Cvičení V

Teorie

Konvexní funkce (připomenutí). Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a $f \in C^2(D)$. Pak f je konvexní na D právě tehdy, když $H_f(x) \succeq 0$ pro všechna $x \in D$.

Tvrzení 1 (Sylvestrovo kritérium pro matici 3×3)**.** Pro symetrickou matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

uvažujeme *hlavní minory* – determinanty podmatic se *stejnými* indexy řádků a sloupců:

$$\begin{aligned} &\text{řádu 1:} \quad a_{11}, \quad a_{22}, \quad a_{33}, \\ &\text{řádu 2:} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \\ &\text{řádu 3:} \quad \det A. \end{aligned}$$

Vedoucí hlavní minory jsou $D_1 = a_{11}$, $D_2 = \det(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{smallmatrix})$, $D_3 = \det A$.

- $A \succ 0 \iff D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ D_3 > 0$ (stačí vedoucí minory),
- $A \succeq 0 \iff$ *všech sedm* hlavních minorů je $\geq 0 \iff$ všechna vlastní čísla jsou ≥ 0,
- $A \prec 0 \iff D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ D_3 < 0$ (znaménka se střídají).

Věta 1 (Úrovňové množiny)**.** Je-li f konvexní, je $\{x : f(x) \leq r\}$ konvexní pro každé $r \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení úlohy LP se dvěma proměnnými

1. Každé omezení $a_i^T x \geq c_i$ (resp. $\leq$) zakreslíme jako hraniční přímku $a_i^T x = c_i$ a vyznačíme příslušnou polorovinu. Jejich průnik je množina přípustných řešení M.
2. Zakreslíme vrstevnici účelové funkce $c^T x = k$ pro nějaké k a vektor c (gradient), ve kterém směru hodnota roste.
3. Vrstevnici posouváme ve směru c (maximalizace), resp. $-c$ (minimalizace), dokud se ještě dotýká množiny M. Poslední dotykový bod (nebo hrana) je optimum.

Mohou nastat čtyři situace:

- jediné optimum (vrchol M),
- nekonečně mnoho optim (hrana M rovnoběžná s vrstevnicí),
- úloha je neomezená (vrstevnici lze posouvat donekonečna),
- úloha nemá přípustné řešení ($M = \emptyset$).

Věta 2. Nechť $M = \operatorname{conv}(\operatorname{ext} M) + \operatorname{pos}(\operatorname{extd} M)$ je neprázdná konvexní polyedrická množina bez přímek. Úloha $\min\{c^T x : x \in M\}$ má optimum právě tehdy, když $c^T s \geq 0$ pro všechna $s \in \operatorname{extd} M$; pak se optimum nabývá v některém krajním bodě M. Je-li $c^T s < 0$ pro nějaký krajní směr, je úloha neomezená.

Příklady

Příklad 1. Rozhodněte, zda je funkce konvexní. Svoji odpověď zdůvodněte.

(a) $f(x,y) = x^2 + y\log y^2$ na množině $\{(x,y) : x \geq 1,\ y \geq 1\}$,
(b) $f(x,y) = -\log(2x+y)$ v oboru $x > 0$, $y > 0$,
(c) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz$,
(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xz$.

Příklad 2. Rozhodněte, zda je následující množina konvexní. Svoji odpověď zdůvodněte.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3x + 4y^2 - 6y \leq 12,\ |x| + y^2 \leq 5,\ y \geq 0\}.$$

Příklad 3. z minula. Rozhodněte, která z následujících množin je konvexní:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^x + e^y \leq 10\}$,
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5,\ e^x + e^y \leq 10\}$.

Příklad 4. (a) Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{aligned} \min\ & 3x_1 - x_2 \\ \text{za podmínek } & 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ & -4x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Řešte stejnou úlohu, ale účelovou funkci maximalizujte.

Příklad 5. (a) Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 + 2x_2 \\ \text{za podmínek } & x_1 - x_2 \leq 5, \\ & x_1 + 2x_2 \leq -2, \\ & -x_1 \leq 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

(b) Řešte stejnou úlohu, ale účelovou funkci maximalizujte.

Příklad 6. Řešte graficky následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1 - 6x_2 \\ \text{za podmínek } & 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & x_1 - x_2 \geq -1, \\ & -x_1 - 2x_2 \geq 1, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$