Cvičení IV – řešení

Kužely

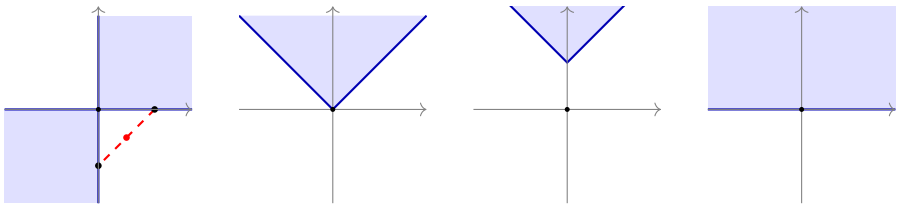
Příklad 1. Kužely

(a)

- $0 \in K$, protože $0 \le 0 \le 0$.
- Pro $(x, y) \in K$ a $\alpha \ge 0$: vynásobením nerovností $0 \le x \le y$ číslem $\alpha \ge 0$ dostaneme $0 \le \alpha x \le \alpha y$, tedy $\alpha(x, y) \in K$.
- Konvexita: pro $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K$ sečteme λ-násobek nerovností pro první a $(1-\lambda)$-násobek pro druhý bod: $0 \le \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \le \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$.
- Žádná přímka: obsahuje-li K přímku $\{a + tu : t \in \mathbb{R}\}$, pak jsou u i $-u$ směry K. Pro kužel je $\mathrm{direct}(K) = K$ (viz 4(c)), tedy $u \in K \cap (-K)$. Z $0 \le u_1 \le u_2$ a $0 \le -u_1 \le -u_2$ plyne $u = 0$.

K je dokonce konvexní polyedrický kužel ($x \ge 0$, $y - x \ge 0$).

(b)



K_1 K_2 K_3 K_4

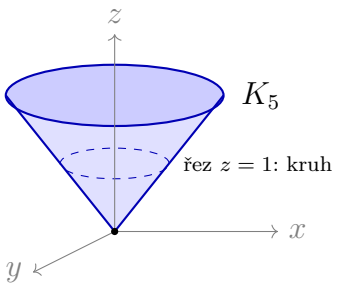
	kužel	konv. kužel	konv. polyedr. kužel	poznámka
K_1	ano	ne	ne	$(1,0), (0,-1) \in K_1$, ale $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \notin K_1$
K_2	ano	ano	ano	$y - x \ge 0$, $y + x \ge 0$; bez přímky
K_3	ne	ne	ne	$0 \notin K_3$; konv. polyedrická množina
K_4	ano	ano	ano	obsahuje přímku (osu x)
K_5	ano	ano	ne	„zmrzlinový kornout“

K_1: $0 \in K_1$ a $(\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2 xy \ge 0$, je to tedy kužel. Jde o sjednocení 1. a 3. kvadrantu, které konvexní není (viz tabulka).

K_5: $0 \in K_5$; pro $\alpha \ge 0$ je $\sqrt{(\alpha x)^2 + (\alpha y)^2} = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \le \alpha z$. Konvexita plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro normu $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\big\|\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2)\big\| \le \lambda\|(x_1, y_1)\| + (1-\lambda)\|(x_2, y_2)\| \le \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2.$$

Polyedrický není: kdyby byl průnikem konečně mnoha poloprostorů, byl by jeho řez rovinou $z = 1$, tj. kruh $\{x^2 + y^2 \le 1\}$, průnikem konečně mnoha polorovin, tedy mnohoúhelníkem s konečně mnoha krajními body. Kruh jich má nekonečně mnoho (příklad 4(b)).



Obaly

Příklad 2. Obaly konkrétních množin

Čtyři obaly se liší jen podmínkami na koeficienty:

	bez podmínky na součet	$\sum\lambda = 1$
$\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathrm{L}(S)$	$\mathrm{Aff}(S)$
$\lambda \geq 0$	$\mathrm{pos}(S)$	$\mathrm{conv}(S)$

Proto vždy $\mathrm{conv}(S) \subseteq \mathrm{Aff}(S) \cap \mathrm{pos}(S)$ a $\mathrm{Aff}(S) \cup \mathrm{pos}(S) \subseteq \mathrm{L}(S)$.

(a) $S = \{[0,1],[1,0],[1,1]\}$

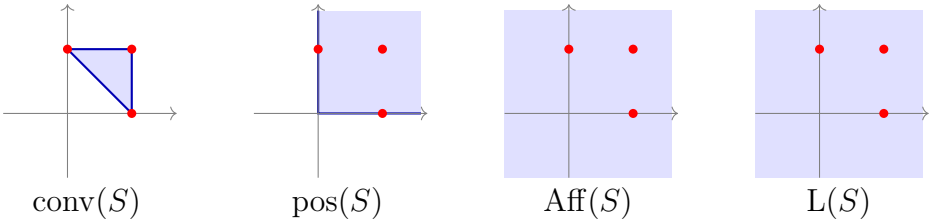
Vyjádříme obecný bod (x,y) jako kombinaci se součtem koeficientů 1:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \qquad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1,$$

tj. $\lambda_2+\lambda_3 = x$, $\lambda_1+\lambda_3 = y$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 1$. Odečtením dostaneme jediné řešení

$$\lambda_1 = 1-x, \qquad \lambda_2 = 1-y, \qquad \lambda_3 = x+y-1.$$

- Soustava má řešení pro každé (x,y), tedy $\mathrm{Aff}(S) = \mathbb{R}^2$ a tím spíš $\mathrm{L}(S) = \mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{conv}(S)$: navíc $\lambda_i \geq 0$, tj. $x \leq 1$, $y \leq 1$, $x+y \geq 1$ – **trojúhelník** s vrcholy $[0,1]$, $[1,0]$, $[1,1]$.
- $\mathrm{pos}(S)$: kombinace nezáporných vektorů s nezápornými koeficienty jsou nezáporné, a naopak $(x,y) = x[1,0] + y[0,1]$ pro $x,y \geq 0$. Tedy $\mathrm{pos}(S) = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ – **první kvadrant** (vektor $[1,1]$ nic nového nepřidá).



(b) $S = \{[1,1],[2,2]\}$

Oba body leží na přímce $y = x$, která prochází počátkem.

- $\mathrm{conv}(S) = \{t(1,1) : t \in [1,2]\}$ – úsečka,
- $\mathrm{pos}(S) = \{t(1,1) : t \geq 0\}$ – polopřímka z počátku,
- $\mathrm{Aff}(S) = \{\lambda(1,1) + (1-\lambda)(2,2)\} = \{(2-\lambda)(1,1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ – přímka $y = x$,
- $\mathrm{L}(S)$ – tatáž přímka $y = x$ (je to podprostor, protože prochází nulou).

(c) $S = \{[1,0],[0,1]\}$

- $\mathrm{conv}(S) = \{(t, 1-t) : t \in [0,1]\}$ – úsečka,
- $\mathrm{pos}(S) = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ – první kvadrant,
- $\mathrm{Aff}(S) = \{(t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$ – přímka $x + y = 1$ (neprochází nulou),
- $\mathrm{L}(S) = \mathbb{R}^2$ (dva lineárně nezávislé vektory).

(d) $S =$ **jednotková kružnice**

- $\mathrm{conv}(S) = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ – kruh. Kruh je konvexní a obsahuje S, proto $\mathrm{conv}(S) \subseteq$ kruh. Naopak každým bodem p kruhu vedeme libovolnou přímku; ta protne kružnici ve dvou bodech u, v a p leží na úsečce mezi nimi, tedy $p \in \mathrm{conv}(\{u, v\})$.
- $\mathrm{pos}(S) = \mathbb{R}^2$: každé $v \neq 0$ je $\|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|}$, kde $\frac{v}{\|v\|} \in S$.
- $\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{L}(S) = \mathbb{R}^2$ (obsahují $\mathrm{pos}(S)$, resp. $\mathrm{conv}(S)$, které už je dvourozměrný).

Příklad 3. Bonus: $\mathrm{conv}(S)$ vs. $\mathrm{Aff}(S) \cap \mathrm{pos}(S)$

Inkluze.

Je-li $x = \sum_{s \in I} \lambda(s) s$ s $\lambda(s) \geq 0$ a $\sum \lambda(s) = 1$, pak je to současně kombinace s nezápornými koeficienty ($x \in \mathrm{pos}(S)$) a se součtem 1 ($x \in \mathrm{Aff}(S)$).

Rovnost obecně neplatí.

V příkladu 2(a) je $\mathrm{Aff}(S) \cap \mathrm{pos}(S) = \mathbb{R}^2 \cap \{x, y \geq 0\} =$ první kvadrant, ale $\mathrm{conv}(S)$ je trojúhelník. Např. bod $(5,5)$ je v průniku, ale ne v $\mathrm{conv}(S)$. Potíž je v tom, že $(5,5)$ zapíšeme jako kombinaci se součtem 1 *nebo* s nezápornými koeficienty, ale ne obojí najednou.

Rovnost pro $0 \notin \mathrm{Aff}(S)$.

Afinní podprostor $\mathrm{Aff}(S)$ lze zapsat jako $v + U$, kde U je lineární podprostor a $v \notin U$ (jinak by $0 \in \mathrm{Aff}(S)$). Existuje lineární funkce φ s $\varphi(v) = 1$ a $\varphi|_U = 0$ (doplníme bázi U vektorem v na bázi $\mathbb{R}^n$). Pak $\varphi \equiv 1$ na $\mathrm{Aff}(S)$, zejména $\varphi(s) = 1$ pro všechna $s \in S$. Pro $x \in \mathrm{Aff}(S) \cap \mathrm{pos}(S)$, $x = \sum \lambda(s) s$ s $\lambda(s) \geq 0$, je

$$1 = \varphi(x) = \sum_{s \in I} \lambda(s)\, \varphi(s) = \sum_{s \in I} \lambda(s),$$

takže $x \in \mathrm{conv}(S)$. V příkladu 2(c) je $\varphi(x, y) = x + y$ a $\mathrm{Aff}(S) \cap \mathrm{pos}(S)$ je právě úsečka.

Krajní body a směry

Užitečná pozorování.

- Pro polyedrickou množinu $A = \{x : a_i^T x \geq c_i\}$ je $s \in \mathrm{direct}(A) \iff a_i^T s \geq 0$ pro všechna i (pro $t \to \infty$ musí být $a_i^T(a + ts) = a_i^T a + t\, a_i^T s \geq c_i$). Směry tedy splňují stejné nerovnosti s nulovou pravou stranou – tzv. *kužel směrů*.
- V rovině je bod polyedrické množiny krajní právě tehdy, když v něm platí jako rovnost dvě podmínky s lineárně nezávislými normálami (je to „vrchol“).
- Vnitřní bod konvexní množiny krajní není (příklad 5).

Příklad 4. Krajní body a směry konkrétních množin

Určení $\mathrm{direct}(A)$ je v zadání bonusová otázka; uvádíme ho u každé množiny, protože z něj se krajní směry hledají nejsnáze (krajní směry jsou „hrany“ množiny $\mathrm{direct}(A)$).

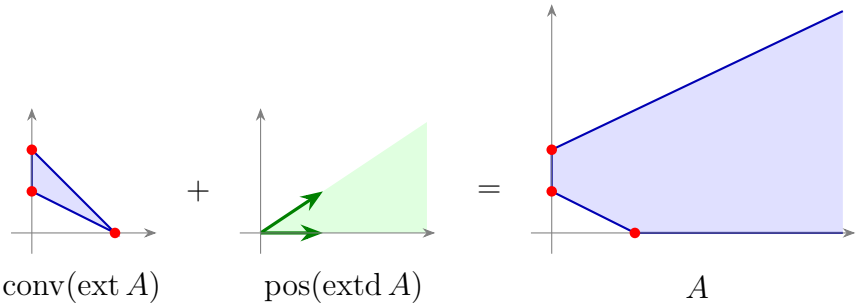
(a) $A = \{x + 2y \geq 2,\ -2x + 3y \leq 6,\ x, y \geq 0\}$

- $\mathrm{ext}(A) = \{(0,1),\ (0,2),\ (2,0)\}$ – průsečíky dvojic hraničních přímek, které leží v A. Např. v $(0,1)$ platí rovností $x = 0$ a $x + 2y = 2$.
- $\mathrm{direct}(A) = \{s : s_1 + 2s_2 \geq 0,\ -2s_1 + 3s_2 \leq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0\} = \{s : 0 \leq s_2 \leq \frac{2}{3}s_1\}$ (první podmínka plyne z ostatních).
- Kužel směrů je ohraničen polopřímkami $s_2 = 0$ a $s_2 = \frac{2}{3}s_1$, tedy

$$\mathrm{extd}(A) = \big\{(1,0),\ \tfrac{1}{\sqrt{13}}(3,2)\big\}.$$

Jsou to směry hraničních polopřímek A vycházejících z $(2,0)$ a z $(0,2)$.

$$A = \mathrm{conv}\{(0,1),(0,2),(2,0)\} + \mathrm{pos}\{(1,0),(3,2)\}.$$



$\mathrm{conv}(\mathrm{ext}\, A)$ $\mathrm{pos}(\mathrm{extd}\, A)$ A

(b) Jednotkový kruh

- ext = celá kružnice $\{x^2 + y^2 = 1\}$. Nechť $\|a\| = 1$ a $a = \alpha x + (1-\alpha)y$ s $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Pak $1 = \|a\| \leq \alpha\|x\| + (1-\alpha)\|y\| \leq 1$, takže $\|x\| = \|y\| = 1$ a v trojúhelníkové nerovnosti nastává rovnost – vektory x, y jsou souhlasně rovnoběžné a stejně dlouhé, tj. $x = y$. Vnitřní body krajní nejsou.
- direct = $\{0\}$ (kruh je omezený), extd = $\emptyset$.
- Kruh je konvexní, ale ne polyedrický – má nekonečně mnoho krajních bodů.

(c) Kužel $K = \{0 \leq x \leq y\}$

- $\mathrm{ext}(K) = \{0\}$. Je-li $0 = \alpha u + (1-\alpha)v$ s $u, v \in K$, pak z $0 = \alpha u_1 + (1-\alpha)v_1$ a $u_1, v_1 \geq 0$ plyne $u_1 = v_1 = 0$ a stejně $u_2 = v_2 = 0$. Každý jiný bod $p \in K$ je středem bodů $\frac{1}{2}p$ a $\frac{3}{2}p$.
- $\mathrm{direct}(K) = K$ – pro kužel jsou směry právě jeho body (z 0 vychází polopřímka $\{ts\}$).
- $\mathrm{extd}(K) = \big\{(0,1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\big\}$. Pro $(0,1) = \alpha u + \beta v$ s $u, v \in K$, $\alpha, \beta > 0$ plyne z první složky $u_1 = v_1 = 0$, tj. $u, v \in \mathrm{pos}\{(0,1)\}$. Pro $(1,1)$: $\alpha(u_2 - u_1) + \beta(v_2 - v_1) = 0$ a

oba sčítance jsou nezáporné, tedy $u_2 = u_1$, $v_2 = v_1$, tj. $u, v \in \operatorname{pos}\{(1,1)\}$. Směr s s $0 < s_1 < s_2$ krajní není: $s = s_1(1,1) + (s_2 - s_1)(0,1)$.
- Platí $K = \operatorname{pos}(\operatorname{extd} K)$ (Věta 1).

(d) Polorovina $\{y \geq 0\}$

- $\operatorname{ext} = \emptyset$: každý bod a je středem bodů $a \pm (1,0)$.
- $\operatorname{direct} = \{s : s_2 \geq 0\}$ (podmínka $y \geq 0$ s nulovou pravou stranou).
- Směr s s $s_2 > 0$ krajní není: $s = \frac{1}{2}(s + e_1) + \frac{1}{2}(s - e_1)$, $e_1 = (1,0)$; oba vektory jsou směry a ani jeden není nezáporným násobkem s.
- Směry $\pm(1,0)$ **krajní jsou**: z $s = \alpha u + \beta v$ s $u_2, v_2 \geq 0$ a $s_2 = 0$ plyne $u_2 = v_2 = 0$; vektory $u, v \notin \operatorname{pos}\{s\}$ na ose x by musely být záporné násobky s, a pak by i $\alpha u + \beta v$ byl záporný násobek s.
- Tedy $\operatorname{extd} = \{(1,0), (-1,0)\}$, ale $\operatorname{pos}(\operatorname{extd}) =$ osa $x \neq$ polorovina. **Věta 1 předpokládá, že kužel neobsahuje přímku** – polorovina ji obsahuje.

(e) $\{y \geq x^2\}$

- $\operatorname{ext} = \{(t, t^2) : t \in \mathbb{R}\}$ (celá parabola). Je-li $(t, t^2) = \alpha p + (1-\alpha)q$ s $p, q \in A$, pak $t^2 = \alpha p_2 + (1-\alpha)q_2 \geq \alpha p_1^2 + (1-\alpha)q_1^2 \geq (\alpha p_1 + (1-\alpha)q_1)^2 = t^2$. Rovnosti dávají $p_2 = p_1^2$, $q_2 = q_1^2$ a (z ryzí konvexity x^2) $p_1 = q_1$, tedy $p = q$. Body s $y > x^2$ jsou vnitřní.
- $\operatorname{direct} = \{(0, s_2) : s_2 \geq 0\}$: pro $s_1 \neq 0$ je $(a_2 + ts_2) - (a_1 + ts_1)^2 \to -\infty$, polopřímka z množiny vyběhne.
- $\operatorname{extd} = \{(0,1)\}$ – směrů je jen jedna polopřímka, rozklad na „jiné“ směry neexistuje.

Příklad 5. Bonus: vnitřní a hraniční body

(a)

Je-li $a \in \operatorname{int}(A)$, existuje $\varepsilon > 0$ s $U_\varepsilon(a) \subseteq A$. Pro libovolné $h \neq 0$ s $\|h\| < \varepsilon$ jsou $x = a + h$, $y = a - h$ různé body A a $a = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, takže a krajní bod není.

(b) Ne vždy.

Pro čtverec $[0,1]^2$ je bod $(\frac{1}{2}, 0)$ hraniční, ale je středem $(0,0)$ a $(1,0)$; krajní body čtverce jsou jen jeho čtyři vrcholy. Pro kruh je naopak krajní *každý* hraniční bod (příklad 4(b)). Krajní body tedy leží vždy na hranici, ale ne každý hraniční bod je krajní.

Konvexní funkce

Konvexitu funkce ověřujeme třemi způsoby:

(i) přímo z definice (nerovnost pro tětivu),
(ii) skládáním z jednodušších konvexních funkcí (příklad 6),
(iii) pro $f \in C^2$ na otevřené množině přes Hessovu matici a Sylvestrovo kritérium.

Pro *vyvrácení* stačí jediný bod, kde H_f není pozitivně semidefinitní, nebo jedna přímka, na které je f „ohnutá dolů“.

Příklad 6. Operace zachovávající konvexitu

Ve všech částech bereme $x, y \in D$, $\lambda \in [0,1]$ a značíme $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

1. Nezáporná kombinace

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(z) &= \alpha f(z) + \beta g(z) \le \alpha\big(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\big) + \beta\big(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)\big) \\ &= \lambda(\alpha f + \beta g)(x) + (1-\lambda)(\alpha f + \beta g)(y).\end{aligned}$$

Nerovnost smíme sčítat a násobit jen *nezápornými* čísly – proto $\alpha, \beta \ge 0$. Pro $\alpha < 0$ tvrzení neplatí: $-x^2$ konvexní není.

2. Supremum

Označme $F = \sup_{i \in I} f_i$ (předpokládáme, že je konečné). Pro každé i je

$$f_i(z) \le \lambda f_i(x) + (1-\lambda) f_i(y) \le \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y),$$

protože $f_i \le F$ a $\lambda, 1-\lambda \ge 0$. Pravá strana nezávisí na i, je to tedy horní závora všech $f_i(z)$, a proto i jejich suprema: $F(z) \le \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$.

Geometricky: $\operatorname{epi}(F) = \bigcap_i \operatorname{epi}(f_i)$ – průnik konvexních množin. Např. $|x| = \max\{x, -x\}$ nebo $\max_i(a_i^T x + b_i)$ (po částech lineární konvexní funkce). Pro *infimum* tvrzení neplatí: $\min\{(x-1)^2, (x+1)^2\}$ konvexní není.

3. Složení $h \circ g$

$$h\big(g(z)\big) \overset{(*)}{\le} h\big(\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)\big) \overset{(**)}{\le} \lambda h\big(g(x)\big) + (1-\lambda) h\big(g(y)\big).$$

$(*)$: z konvexity g je $g(z) \le \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$ a h je *neklesající*, takže se nerovnost zachová.
$(**)$: konvexita h v bodech $g(x)$, $g(y)$.

Oba předpoklady jsou potřeba: $h(t) = e^{-t}$ je konvexní, ale klesající, a $g(x) = x^2$ konvexní; $h(g(x)) = e^{-x^2}$ (Gaussova křivka) konvexní není. Typické použití: $e^{g(x)}$ pro konvexní g, $g(x)^p$ pro konvexní $g \ge 0$ a $p \ge 1$.

Příklad 7. Které funkce jsou konvexní

(a) $f = |x_1| + \cdots + |x_n|$: konvexní

Hessián nepoužijeme (v nule f není diferencovatelná). Funkce $|t|$ je konvexní ($|\lambda s + (1-\lambda)t| \le \lambda|s| + (1-\lambda)|t|$ z trojúhelníkové nerovnosti) a f je součet konvexních funkcí $x \mapsto |x_i|$, tedy konvexní podle 6.1. Jinak: $f = \|x\|_1$ je norma a každá norma je konvexní.

(b) $f = x^2/y$, $y > 0$: konvexní

Definiční obor $\{y > 0\}$ je otevřená konvexní množina. Derivace (y při derivování podle x bereme jako konstantu a naopak; $\frac{x^2}{y} = x^2 y^{-1}$):

$$f_x = \frac{2x}{y}, \qquad f_y = -\frac{x^2}{y^2},$$

$$f_{xx} = \frac{2}{y}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{2x}{y}\Big) = -\frac{2x}{y^2}, \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\big(-x^2 y^{-2}\big) = \frac{2x^2}{y^3},$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y} & -\dfrac{2x}{y^2} \\ -\dfrac{2x}{y^2} & \dfrac{2x^2}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Hlavní minory (Sylvestrovo kritérium pro $\succeq 0$, tedy všechny):

$$\text{řádu 1: } f_{xx} = \frac{2}{y} > 0, \quad f_{yy} = \frac{2x^2}{y^3} \geq 0;$$

$$\text{řádu 2: } \det H_f = \frac{2}{y}\cdot\frac{2x^2}{y^3} - \left(\frac{2x}{y^2}\right)^2 = \frac{4x^2}{y^4} - \frac{4x^2}{y^4} = 0.$$

Všechny jsou nezáporné, $H_f \succeq 0$ na celém (otevřeném, konvexním) definičním oboru. Pozitivně definitní ale není ($\det = 0$): f je na polopřímkách $\{t(x,y)\}$ lineární, $f(tx,ty) = tf(x,y)$.

(c) $f = (x^2+y^2)^4$: konvexní

Složením: $g(x,y) = x^2+y^2 \geq 0$ je konvexní a $h(t) = t^4$ je na $[0,\infty)$ konvexní a neklesající (na celém $\mathbb{R}$ neklesající není, ale g jiné hodnoty nenabývá). Podle 6.3 je $h \circ g$ konvexní.

Hessiánem: označme $r = x^2+y^2$, takže $r_x = 2x$, $r_y = 2y$. Řetízkovým pravidlem

$$f_x = 4r^3 \cdot 2x = 8x\,r^3, \qquad f_y = 8y\,r^3,$$

$$f_{xx} = 8r^3 + 8x\cdot 3r^2\cdot 2x = 8r^3 + 48x^2r^2, \qquad f_{xy} = 8x\cdot 3r^2\cdot 2y = 48xy\,r^2, \qquad f_{yy} = 8r^3 + 48y^2r^2.$$

Minory řádu 1 (f_{xx}, f_{yy}) jsou zřejmě nezáporné a

$$\begin{aligned}\det H_f &= (8r^3+48x^2r^2)(8r^3+48y^2r^2) - (48xy\,r^2)^2 \\ &= 64r^6 + 384r^5\underbrace{(x^2+y^2)}_{=r} + 48^2x^2y^2r^4 - 48^2x^2y^2r^4 = 448\,r^6 \geq 0.\end{aligned}$$

(d) $f = x^2+y^2-z^2+2xy+2xz+2yz$: není konvexní

První derivace

$$f_x = 2x+2y+2z, \qquad f_y = 2y+2x+2z, \qquad f_z = -2z+2x+2y,$$

druhé derivace jsou konstanty: $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{zz} = -2$, $f_{xy} = 2$, $f_{xz} = 2$, $f_{yz} = 2$. Tedy

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hlavní minory řádu 1 jsou diagonální prvky $2, 2, -2$; už $h_{33} = f_{zz} = -2 < 0$, takže $H_f \not\succeq 0$. Přímo: $f(0,0,z) = -z^2$ je na ose z konkávní. *Pozor:* vedoucí hlavní minory jsou $D_1 = 2$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ (první dva řádky jsou stejné) – všechny nezáporné, a přesto matice semidefinitní není. Pro semidefinitnost je nutné kontrolovat *všechny* hlavní minory.

(e) $f = xy\log(xy)$**,** $x, y > 0$**: není konvexní**

Označme $L = \log(xy) = \log x + \log y$, takže $L_x = \frac{1}{x}$, $L_y = \frac{1}{y}$. Součinové pravidlo:

$$f_x = y\,L + xy \cdot \frac{1}{x} = y(L+1), \qquad f_y = x(L+1),$$

$$f_{xx} = y \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x}, \qquad f_{yy} = \frac{x}{y}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\big(y(L+1)\big) = (L+1) + y \cdot \frac{1}{y} = L+2,$$

$$H_f = \begin{pmatrix} y/x & L+2 \\ L+2 & x/y \end{pmatrix}, \qquad \det H_f = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y} - (L+2)^2 = 1 - (L+2)^2 = -(L+1)(L+3).$$

Minory řádu 1 $(\frac{y}{x}, \frac{x}{y})$ jsou kladné, rozhoduje determinant. Determinant je nezáporný jen pro $-3 \le L \le -1$, tj. $e^{-3} \le xy \le e^{-1}$. Např. v bodě $(1,1)$ je $L = 0$ a $\det H_f = -3 < 0$, matice je indefinitní. Na přímce $(1+s, 1-s)$ je $g(s) = (1-s^2)\log(1-s^2)$ a $g''(0) = -2 < 0$.

Příklad 8. Které množiny jsou konvexní

Obě množiny zapíšeme pomocí úrovňových množin konvexních funkcí a použijeme větu o nich.

(a) Funkce $f(x,y) = e^x + e^y$ je konvexní: je to součet konvexních funkcí jedné proměnné, případně $f_{xx} = e^x > 0$, $f_{yy} = e^y > 0$, $f_{xy} = 0$, tedy $H_f = \operatorname{diag}(e^x, e^y) \succ 0$. Množina $\{f \le 10\}$ je její úrovňová množina, tedy **konvexní**.

(b) $\{x^2 + y^2 \le 5\}$ je úrovňová množina konvexní funkce $x^2 + y^2$ (kruh), druhá množina je z (a). Průnik dvou konvexních množin je **konvexní**.

Příklad 9. Bonus: množiny a funkce

(a) Není konvexní.

Podmínka $x \le (y-1)^2$ popisuje body „vlevo od paraboly“ $x = (y-1)^2$, tedy *vně* konvexní množiny $\{x \ge (y-1)^2\}$. Funkce $x - (y-1)^2$ je v y konkávní, věta o úrovňových množinách nepomůže. Protipříklad: body $(4,3)$ a $(16,5)$ leží na parabole ($4 = 2^2$, $16 = 4^2$) a splňují i $x + 2y \ge 6$, $x, y \ge 0$. Jejich střed $(10,4)$ ale ne: $10 > (4-1)^2 = 9$.

(b) Je konvexní.

Doplněním na čtverce $x^2 + 2x + 3y^2 - 6y \le 10 \iff (x+1)^2 + 3(y-1)^2 \le 14$ – elipsa: pro $q = (x+1)^2 + 3(y-1)^2$ je $q_{xx} = 2$, $q_{yy} = 6$, $q_{xy} = 0$, Hessián $\operatorname{diag}(2,6) \succ 0$. Funkce $|x| + y^2$ je součtem konvexních funkcí, $y \ge 0$ je polorovina. Množina je průnikem tří konvexních množin.

(c) Není konvexní.

Funkce $\varphi(t) = t\log t$ je sice konvexní, ale není monotónní a vnitřní funkce $u(x,y) = e^x + y^3$ konvexní není (y^3 je pro $y < 0$ konkávní). Navíc musí být $u > 0$, aby $\log u$ existoval. Rovnice $t\log t = 15$ má jediné řešení $t^* \approx 7{,}46$ a protože $\varphi \le 15$ na celém $(0, t^*]$, je množina rovna

$$\{(x,y) : 0 < e^x + y^3 \le t^*,\ x \le 2\}.$$

Dolní hranice $y > -e^{x/3}$ je „nad konkávní křivkou“, což konvexitu kazí. Protipříklad: $P_1 = (0;\, -0{,}99)$ s $u = 1 - 0{,}970 = 0{,}030$ a $P_2 = (2;\, -1{,}94)$ s $u = 7{,}389 - 7{,}301 = 0{,}088$ do množiny patří, ale jejich střed $(1;\, -1{,}465)$ má $u = 2{,}718 - 3{,}144 = -0{,}43 < 0$.

(d) Není konvexní.

Označme $a = e^{-y} \in (0,1)$ a $E = \exp(x^2 + a)$. Platí $a_y = -a$, $E_x = 2xE$ a $E_y = -aE$. Pak

$$f_x = 2xE + 6y, \qquad f_y = -aE + 6x,$$

$$f_{xx} = 2E + 2x \cdot 2xE = (2 + 4x^2)E, \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xE + 6y) = 2x(-aE) + 6 = 6 - 2xaE,$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(-aE) = -a_y E - aE_y = aE + a^2 E = a(1+a)E.$$

Minory řádu 1 jsou kladné, determinant:

$$\det H_f = (2 + 4x^2)\, a(1+a)E^2 - (6 - 2xaE)^2 = 2\big[(1 + 2x^2 + a)\, aE^2 + 12\, xaE - 18\big].$$

Pro $y \to \infty$ je $a \to 0$, $E \to e^{x^2}$ a $\det H_f \to -36 < 0$. Např. v bodě $(2, 10)$ je $\det H_f \approx -33{,}4$, Hessián je indefinitní (smíšený člen $6xy$ převáží slabé zakřivení v y).

(e) Pro žádné a není konvexní (je konkávní).

Označme $t = x + ay$. Pak $f = \log \frac{e^t}{1+e^t} = t - \log(1 + e^t) =: \psi(t)$ a

$$\psi'(t) = \frac{1}{1 + e^t}, \qquad \psi''(t) = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2} < 0.$$

Protože $t_x = 1$, $t_y = a$, je řetízkovým pravidlem $f_x = \psi'(t)$, $f_y = a\psi'(t)$, $f_{xx} = \psi''(t)$, $f_{xy} = a\psi''(t)$, $f_{yy} = a^2\psi''(t)$, tedy $H_f = \psi''(t) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$. Minory: $f_{xx} = \psi'' < 0$, $\det H_f = a^2\psi''^2 - a^2\psi''^2 = 0$. Matice je negativně semidefinitní matice ($\psi'' < 0$, matice $\binom{1}{a}(1\ a)$ je pozitivně semidefinitní). Tedy f je konkávní; konvexní není, protože $f_{xx} = \psi''(t) < 0$. (Jde o logaritmus logistické funkce, který známe z logistické regrese.)