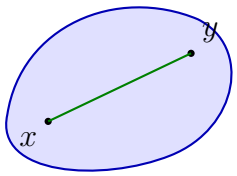
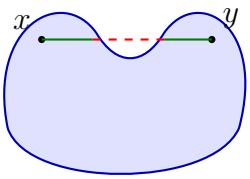
Cvičení III

Teorie

Definice 1. Řekneme, že množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konvexní*, pokud $\forall x, y \in X$ a $\forall \lambda \in [0,1]$ platí $\lambda x + (1-\lambda)y \in X$.



konvexní



není konvexní

Připomeňte si (pro $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$):

- **nadrovina** je množina $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = c\}$,
- **uzavřený poloprostor** je množina $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq c\}$,
- **otevřený poloprostor** je množina $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > c\}$,
- **konvexní polyedrická množina** je průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů,
- **konvexní polyedr** je omezená konvexní polyedrická množina,
- **kužel** je množina $K \subseteq \mathbb{R}^n$, pro kterou $0 \in K$ a $\forall x \in K,\ \alpha \geq 0$: $\alpha x \in K$,
- **konvexní kužel** je množina K, pro kterou $0 \in K$ a $\forall x, y \in K,\ \alpha, \beta \geq 0$: $\alpha x + \beta y \in K$ (tj. kužel, který je zároveň konvexní množinou),
- **konvexní polyedrický kužel** je konvexní kužel, který je zároveň konvexní polyedrická množina.

Příklady

Příklad 1. Buďte $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní. Rozhodněte, zda následující množiny musí, nebo nemusí být konvexní (dokažte, nebo najděte protipříklad).

(a) $A \cup B$,
(b) $A \cap B$,
(c) $A \setminus B$,
(d) A^C,
(e) $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad 2. Pokračování předchozího příkladu:

(a) $\mathrm{clo}(A)$,
(b) $\mathrm{int}(A)$,
(c) Minkowského součet $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\} = \bigcup_{b \in B}(A + b)$,
(d) rozdíl $A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}$,
(e) Minkowského rozdíl $A \ominus B = \{x \in \mathbb{R}^n : x + B \subseteq A\} = \bigcap_{b \in B}(A - b)$.

Příklad 3. Bonus. Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ má vlastnost, že $\forall x, y \in A$ je také $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in A$.

(a) Je A konvexní?
(b) Je A konvexní, pokud víme, že je uzavřená?
(c) Je A konvexní, pokud víme, že je otevřená?

Příklad 4. Bonus. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená konvexní množina, která obsahuje přímku p. Ukažte, že pro každý bod $b \in M$ obsahuje M také přímku rovnoběžnou s p procházející bodem b.

Příklad 5. Rozhodněte, jakého typu jsou následující množiny:

(a)
$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x + y &\leq 4 \end{aligned}$$

Příklad 6. Rozhodněte, které z množin jsou konvexní polyedr a které ne:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$,
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq y \leq 1\}$,
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq 1\}$.