

NÁHODNÁ VELIČINA A JEJÍ MOMENTY

7.11.2024

1. V první truhle jsou 2 zlaté a 2 stříbrné mince, v druhé truhle je 1 zlatá a 2 stříbrné mince. Náhodně vybereme jednu truhlu a z ní dvě mince. Náhodná veličina X udává počet takto vytažených zlatých mincí.
 - (a) Určete rozdělení X .
 - (b) Spočítejte očekávaný počet vytažených zlatých mincí. Určete dále i rozptyl.
 - (c) Za každou zlatou minci dostanete v zastavárně 100 Kč. Označme jako Y částku, kterou ve výsledku získáte. Určete její rozdělení, střední hodnotu a rozptyl.
2. Poloměr bubliny vyfouknuté z bublifuku je náhodná veličina R s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 5]$ cm.
 - (a) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl poloměru bubliny R .
 - (b) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl objemu bubliny $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
3. Při přenosu binárního souboru se náhodně vybraný znak zkreslí s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ a jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle na sobě. Náhodná veličina X udává počet zkreslených znaků v binární posloupnosti délky n .
 - (a) Připomeňte si, jaké rozdělení má X .
 - (b) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl X pro $n = 1$.
 - (c) Spočítejte střední hodnotu a rozptyl X pro $n = 2$.
 - (d) Určete očekávaný počet zkreslených znaků v posloupnosti délky n .
 - (e) Spočítejte rozptyl veličiny X pro obecné n .
4. Doba čekání na vlak je náhodná veličina X s exponenciálním rozdělením s hustotou $f(x) = 1/5 \cdot e^{-x/5}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = 0$ pro $x < 0$.
 - (a) Spočítejte střední hodnotu X .
 - (b) Spočítejte rozptyl X .
5. Náhodná veličina X má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x^3}}, & x \geq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}.$$

- (a) Určete konstantu c , aby f byla hustota.
- (b) Spočítejte střední hodnotu X .

OPAKOVÁNÍ

CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH VELIČIN: Základní charakteristiky náhodné veličiny X jsou:

– **Střední hodnota** EX , která vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X .

- V případě diskrétního rozdělení ji spočítáme jako

$$EX = \sum_k x_k P(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad (\text{existuje-li}).$$

- V případě spojitého rozdělení ji spočteme jako

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (\text{existuje-li}).$$

– **Rozptyl** veličiny X , který popisuje její variabilitu kolem EX . Rozptyl je definovaný jako

$$\text{Var } X = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

a je to vždy **nezáporné** číslo!

– Při výpočtech nás může zajímat $Eh(X)$. Tu spočteme z rozdělení X následovně:

- pro diskrétní: $Eh(X) = \sum_k h(x_k) P(X = x_k) = \sum_k h(x_k) p_k$ (existuje-li),
- pro spojitý: $Eh(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$ (existuje-li).

VLASTNOSTI

– Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí

$$E(a + bX) = a + bEX, \quad \text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var } X.$$