

Cvičení IX

TEORIE

Věta 1 (Farkasova věta). *Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má nezáporné řešení tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{u}$, které splňuje $\mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq 0$, platí $\mathbf{b}^T \mathbf{u} \geq 0$.*

Definice 3.4. Necht' $\mathbf{A}$ je daná matice dimenze (m, n) , $\mathbf{b}$ daný m -rozměrný vektor a $\mathbf{c}$ daný n -rozměrný vektor. Pak následující dvě úlohy nazveme *dvojice symetrických duálních úloh LP*:

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}, \quad (3.20)$$

$$\max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq 0\}. \quad (3.21)$$

Věta 3.10 (Slabá věta o dualitě). Pro tuto dvojici duálních úloh platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{M} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{N} : \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

Věta 3.11 (Silná věta o dualitě). Úloha (3.20) má optimální řešení tehdy a jen tehdy, má-li úloha (3.21) optimální řešení. V takovém případě navíc platí, že

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}} \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

Věta 3.12 (Shrnutí). Pro danou dvojici duálních úloh LP (3.20), (3.21) nastává právě jedna ze čtyř možností:

- (i) Žádná z těchto úloh nemá přípustné řešení, tj. $\mathcal{M} = \emptyset$, $\mathcal{N} = \emptyset$.
- (ii) $\mathcal{M} = \emptyset$, $\mathcal{N} \neq \emptyset$, ale úloha (3.21) nemá optimální řešení, protože

$$\max_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}} \mathbf{b}^T \mathbf{y} = +\infty.$$

- (iii) $\mathcal{M} \neq \emptyset$, $\mathcal{N} = \emptyset$, ale úloha (3.20) nemá optimální řešení, protože

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = -\infty.$$

- (iv) Obě úlohy mají optimální řešení a platí

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{N}} \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

Navíc každá dvojice optimálních řešení úloh (3.20) a (3.21) splňuje podmínky komplementarity.

PŘÍKLADY

Příklad 1 Rozhodněte, zda má soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nezáporné řešení.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Co kdyby třetí sloupec $(-1, 0)^T$ v matici nebyl?

Příklad 2 Pomocí Farkasovy věty rozhodněte, zda je neprázdná množina

$$\{2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 2, -x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 = 6, 3x_1 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 \geq 3\}$$

pro $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \in \mathbb{R}, x_5 \in \mathbb{R}$.

Příklad 3 Formulujte Farkasovu větu pro existenci řešení soustavy:

1. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
2. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$
3. $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$