

CVIČENÍ V

TEORIE

V tomto cvičení se budeme zabývat úlohou LP ve standardním tvaru. Budeme ji uvažovat v kompaktním maticovém zápise

$$\min\{c^\top x : Ax = b, x \geq 0\},$$

kde $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Množinu přípustných řešení této úlohy označíme $M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$.

Definice 3.11.: Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, která má plnou řádkovou hodnost. Vyberme nějakou množinu indexů proměnných $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$ tak, aby obsahovala právě m různých položek. Vezměme příslušné sloupce matice A a sestavme z nich čtvercovou matici $A_L = (A_{j,i})$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i \in L$.

- Pokud je matice A_L regulární, pak říkáme, že L je *bází úlohy (3.4)*.
- Když L je báze úlohy (3.4), pak k ní přísluší $x(L) \in \mathbb{R}^n$, které je jednoznačně určené podmínkami $Ax(L) = b$ a $x_i(L) = 0$ pro všechna $i \notin L$. Bod $x(L)$ nazýváme *bazické řešení* příslušné k bázi L .
- Nechť L je báze úlohy (3.4) a bazické řešení $x(L)$ je nezáporné. Pak mluvíme o *přípustné bázi*.
- Nechť L je báze úlohy (3.4) a příslušné bazické řešení $x(L)$ je optimálním řešením úlohy (3.4). Pak mluvíme o *optimální bázi*.
- Říkáme, že x je *bazické řešení* úlohy (3.4), jestliže existuje báze L tak, že $x = x(L)$.
- Říkáme, že x je *přípustné bazické řešení* úlohy (3.4), jestliže existuje přípustná báze L tak, že $x = x(L)$.
- Říkáme, že x je *optimální bazické řešení* úlohy (3.4), jestliže existuje optimální báze L tak, že $x = x(L)$.

Uvědomme si, že bazické řešení je opravdu jednoznačně určeno příslušnou bází.

Lemma 3.12.: Nechť $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$ je báze úlohy (3.4). Potom příslušné bazické řešení je určeno jednoznačně a je tvaru

$$x(L)_L = (A_L)^{-1}b, \quad x(L)_i = 0 \text{ pro } i \notin L.$$

Místo „přípustné bazické řešení“ se také používá termín „základní řešení“; viz např. [2]. Přípustná bazická řešení jsou krajinní body množiny přípustných řešení.

Věta 3.13.: Pokud matice A má plnou řádkovou hodnost, pak množina $\text{ext}(M)$ je rovna množině všech přípustných bazických řešení.

Věta 3.13 dává návod jak numericky počítat krajní body M : Projdeme postupně všechny možnosti volby $L \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{card}(L) = m$. Pokud A_L není regulární, přejdeme k další volbě L . Když je A_L regulární, pak řešíme soustavu $A_L \xi = b$, tj. $\xi = (A_L)^{-1}b$. Když $\xi \geq 0$, pak jsme našli $x(L)$ krajní bod M , kde $x(L)_L = \xi = (A_L)^{-1}b$, $x(L)_{|L^c} = 0$.

Pro krajní směry množiny přípustných řešení také existuje charakterizace, která umožňuje jejich výpočet.

Nová Definice 3.13.A: Pro $y \in \mathbb{R}^n$ budeme označovat množinu indexů jeho kladných složek symbolem

$$S^+(y) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} : y_i > 0\}.$$

Věta 3.14.: Pokud hodnota matice A je m , pak platí

$$\text{extd}(M) = \{y \in \text{direct}(M) : \text{card}(S^+(y)) \leq m + 1, \|y\| = 1\}. \quad (3.9)$$

Důkaz: Důkaz je uveden například v [1], věta 2.6.6., p. 70.

Q.E.D.

Věta 3.14 dává návod jak numericky počítat krajní směry M : Projdeme postupně všechny možnosti volby $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{card}(K) = m + 1$. Pokud A_K nemá plnou řádkovou hodnotu, přejdeme k další volbě K . Když A_K má plnou řádkovou hodnotu, pak nalezneme netriviální řešení soustavy $A_K \eta = 0$. Když $\eta \geq 0$, pak jsme našli $y(K)$ krajní směr M .

PŘÍKLADY

Příklad 1 (5.13): Převeďte následující úlohu do standardního tvaru (případně do tvaru nerovností):

$$\begin{array}{rcll} \max & -3x_1 & + & 5x_2 \\ \text{za podmíněk} & 5x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\ & 8x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Příklad 2. Řešte přímou metodou následující úlohu a porovnejte s výsledky z minulého cvičení (grafické řešení):

$$\begin{array}{rcll} \min & 3x_1 & - & x_2 \\ \text{za podmíněk} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\ & -4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Příklad 3. Rozložte množinu

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_2 - x_3 = -2, -x_1 + 2x_2 - x_4 = -1, x \geq 0\}$$

a přímou metodou řešte úlohu:

$$\min \{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4, x \in M\}$$

Příklad 4. Přímou metodou vyřešte úlohu lineárního programování:

$$\begin{array}{rcllcl} \min & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{za podmíněk} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$