
CVIČENÍ II

FORMULACE

Klasický problém batohu (Knapsack problem): Máme množinu n předmětů, kde každý předmět i má hodnotu c_i (Kč) a hmotnost w_i (kg). Kapacita batohu je W (kg). Cílem je vybrat podmnožinu předmětů tak, aby byla maximalizována celková hodnota, aniž by byla překročena kapacita batohu.

- (a) Formulujte optimalizační úlohu.
 - (b) Co když mohu kapacitu batohu překročit, ale platím penalizaci P (Kč/kg) za každý kg přes limit?
-

PŘÍKLADY

Příklad 1. Buďte $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexní. Rozhodněte, zda následující množiny musí, nebo nemusí být konvexní.

- (a) $A \cup B$
- (b) $A \cap B$
- (c) $A \setminus B$
- (d) A^C
- (e) αA , $\alpha \in \mathbb{R}$

Příklad 2. Podobně jako v předchozím případě

- (a) $\text{clo}(A)$
- (b) $\text{int}(A)$
- (c) Minkowského součet $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b) = \bigcup_{a \in A} (a + B)$
- (d) Minkowského rozdíl $A \ominus B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\} = \bigcap_{b \in B} (A - b)$

Příklad 6. Rozhodněte, jakého typu jsou následující množiny:

- (a)

$$\begin{aligned}x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x, y &\geq 0\end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned}x + 2y &\geq 2 \\ -2x + 3y &\leq 6 \\ x + y &\leq 4\end{aligned}$$

Příklad 8. Rozhodněte o množinách:

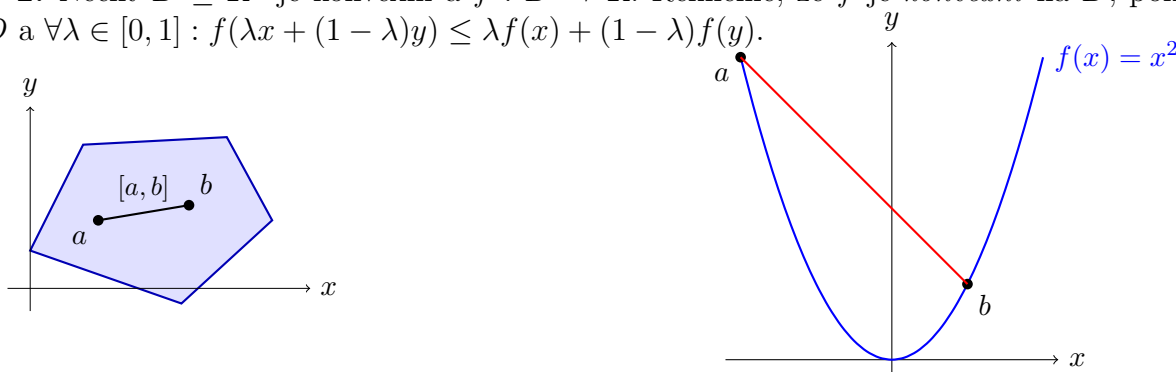
- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$,
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq y \leq 1\}$,
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 1\}$,

která z nich je konvexní polyedr a která není.

TEORIE

Definice 1. Řekneme, že množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konvexní*, pokud $\forall x, y \in X$ platí $\forall \alpha \in [0, 1] : \alpha x + (1 - \alpha)y \in X$.

Definice 2. Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *konvexní* na D , pokud $\forall x, y \in D$ a $\forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.



Konvexita je jednou ze základních analytických vlastností funkcí. V optimalizaci má klíčovou roli jak pro teoretické vlastnosti řešení, tak pro výpočetní algoritmy. Konvexita množiny nám totiž umožňuje při výpočtu optimální hodnoty spoléhat na fakt, že krokem ve směru „do středu“ množiny přípustných řešení z ní nemůžeme vyjít ven. Tím je zaručeno, že uvnitř množiny přípustných řešení se nenacházejí žádné „pasti“, tedy pokud algoritmus například sleduje cestu největšího poklesu uvnitř množiny, nehrozí, že by došel do oblasti nepřípustnosti.

Připomeňme si následující definice:

- **Nadrovina** je množina, kterou lze zapsat jako $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = c\}$ pro vhodná $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- **Uzavřený poloprostor** je množina, kterou lze zapsat jako $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq c\}$ pro vhodná $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- **Otevřený poloprostor** je množina, kterou lze zapsat jako $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x > c\}$ pro vhodná $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- **Konvexní polyedrická množina** je množina, která je průnikem konečně mnoha uzavřených poloprostorů.
- **Konvexní polyedr** je omezená konečná polyedrická množina.
- **Kužel** je množina $K \subset \mathbb{R}^n$, která obsahuje počátek, tj. $0 \in K$, a nezáporné násobky svých prvků, tj. $\forall x \in K, \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \in K$.
- **Konvexní kužel** je zároveň kužel i konvexní množina.