

CVIČENÍ I

TEORIE

OPTIMALIZAČNÍ PROBLÉM. Máme danou množinu rozhodnutí (strategií, variant, plánů...) označme ji X , a zároveň známe oceňovací funkci $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, která každému rozhodnutí $x \in X$ přiřadí hodnotu $f(x)$. Naším cílem je optimalizovat – maximalizovat nebo minimalizovat – hodnotu f na množině X .

Pozorování: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že naším cílem je minimalizovat funkční hodnoty f . Pokud by totiž f představovala zisk, můžeme definovat ztrátu $l = -f$, nebo někdy také tzv. „žal“ $r = (\sup f) - f$, a minimalizovat novou upravenou hodnotu.

Formulaci úlohy optimalizace myslíme zápis

$$\begin{aligned} \min f(x), \\ \text{s.t. } x \in X. \end{aligned} \tag{1}$$

TERMINOLOGIE.

- (a) Množinu X nazýváme množinou přípustných řešení.
- (b) Funkci f nazýváme účelovou funkcí.
- (c) Rozhodnutí $x^* \in X : f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X$ nazýváme optimálním řešením úlohy (1).

Pozorování Typicky $X \simeq S \subseteq \mathbb{R}^n$ a množinu S můžeme vyjádřit pomocí kombinace rovností a nerovností, které musí vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ splňovat, aby byl přípustným řešením pro úlohu (1). Označme $I^=$ množinu indexů omezení tvaru rovností a $I^{\leq}$ množinu indexů omezení tvaru nerovností, přičemž funkce, které vyjadřují rovnosti, označme $h_j, j \in I^=$ a funkce nerovností $g_i, i \in I^{\leq}$. Úlohu (1) pak můžeme zapsat přesněji jako

$$\min f(\mathbf{x}), \tag{2}$$

$$\text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I^{\leq}, \tag{3}$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, j \in I^=, \tag{4}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Z klasické analýzy (kalkulu) víme, že v případě, kdy $f \in \mathcal{C}^2(a, b)$ a chceme najít její minimum x^* na intervalu $[a, b]$, pak platí

$$x^* \in \arg \min_{x \in [a, b]} f(x) \iff (f'(x^*) = 0 \wedge f''(x^*) \geq 0) \text{ nebo } x^* \in \{a, b\}, f(x^*) \leq f(x), \forall x \in [a, b].$$

Tudíž buď funkce splňuje tzv. podmínku druhého řádu, nebo je optimum dosaženo v krajním bodě množiny přípustných řešení. Naším cílem v tomto předmětu bude zavést podobná kritéria a algoritmy výpočtu pro optimální hodnoty (2), a to zejména pro problémy, kdy funkce f, g_i, h_j jsou lineární (afinní) nebo konvexní.

FORMULACE

Formulace 1. (Výrobní plánování) Podnik vyrábí 2 druhy výrobků V_1, V_2 . Při výrobě se spotřebovávají suroviny S_1 a S_2 a strojový čas Z_1 . Na výrobu 1 kg výrobku V_1 se spotřebují 2 kg suroviny S_1 a 6 kg suroviny S_2 , žádný čas na stroji. Výroba 1 kg výrobku V_2 trvá 2 hodiny a spotřebuje 5 kg suroviny S_1 a 1 kg suroviny S_2 . Na 1 den máme k dispozici 20 kg S_1 , 15 kg S_2 a 13 hodin na zařízení Z_1 . Při prodeji pak podnik získá 2 Kč za 1 kg V_1 , 4 Kč za 1 kg V_2 .

1. Co jsou proměnné/rozhodnutí? Jaký mají charakter?
2. Jak byste úlohu formulovali?
3. Jaké jsou další možné zápisy takové optimalizační úlohy?
4. Kde bychom očekávali řešení?
5. Dá se úloha znázornit graficky?

Formulace 2. (Dopravní problém) Mějme 1 typ neomezeně dělitelného produktu, který chceme přepravit od m výrobců k n odběratelům. Známe požadavky odběratelů (j -tý chce b_j) a kapacity výrobců (a_i je kapacita i -tého výrobce). Chceme splnit požadavky odběratelů a přitom minimalizovat náklady na přepravu (na přepravu 1 kusu zboží od i -tého výrobce k j -tému odběrateli jsou c_{ij}). Formulujte úlohu jako optimalizační problém.

Formulace 3. (Přiřazovací problém.) V podniku pracují 3 skupiny S_1, S_2, S_3 . Každá skupina může za týden zhotovit jednu ze 3 zakázek Z_1, Z_2, Z_3 . Kvalita a také cena zakázky závisí na tom, která skupina ji zhotoví. Předpokládané zisky v tisících Kč udává tabulka. Cílem úlohy je přiřadit zakázky pracovním skupinám tak, aby výsledný celkový zisk byl maximální.

	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	4	3	2
S_2	6	4	3
S_3	4	4	4

1. Co jsou proměnné/rozhodnutí? Jaký mají charakter?
2. Je zakázka unikátní? (konkrétní zákazník) Nebo je to typ výrobku? (co by to změnilo v modelu?)

Formulace 4. (Problém obchodního cestujícího.) Mějme n zákazníků. Cena přepravy od zákazníka i k zákazníkovi j je c_{ij} . Cílem je je všechny navštívit za minimálních nákladů. Zkuste zformulovat úlohu.