1. Uvažujme společenskou hru "Tik Tak Bum", ve které se využívá elektronická bomba, která náhodný čas tiká (a během tohoto času hráči střídavě vymýšlejí slova a bombu si předávají) a následně bomba zvukově vybuchne. Princip hry je založen na tom, že nikdo dopředu neví, jak dlouho bude bomba tikat, než vybuchne. Označme jako X náhodnou veličinu udávající čas od spuštění do výbuchu bomby. Tato veličina má tedy neznámé rozdělení s neznámou distribuční funkcí F. Dále lze předpokládat, že náhodná veličina X má spojité rozdělení s hustotou f, která je nulová mimo interval $[0, b]$, kde $b > 0$ je neznámé číslo.

   (a) Nejprve bychom rádi odhadli střední dobu tikání bomby. Navrhněte vhodný postup a vhodný odhad. Je Váš navržený odhad nestranný?

   (b) Pomocí čeho bychom mohli (alespoň přibližně) ověřit, zda lze předpokládat, že má X rovnoměrné rozdělení na $[0, b]$?

   (c) Navrhněte, jak bychom mohli odhadnout b. Jedná se o nestranný odhad?

   (d) Navrhněte postup, jak bychom mohli odhadnout pravděpodobnost, že bomba bude tikat méně než 10 sekund. Spočtěte střední hodnotu a rozptyl takového odhadu.

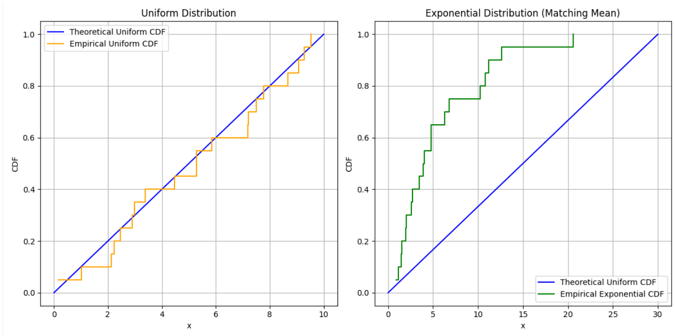
$X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z rozdělení s hustotou f a distribuční fcí F

a) odhad EX : $\quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\bar{X} = E \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n}{n} EX_1 = EX_1 \Rightarrow \text{odhad je nestranný}$$

CDF ?

b) $X \sim U_{[0,b]}$?



HISTOGRAM ?

c) $X_1, \dots, X_n$ náhodný výběr z $U_{[0,b]}$

$$f(x, b) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{pro } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$L(b \mid X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} \frac{1}{b^n} & \text{pokud } b \geq \max(X_1, \dots, X_n) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\ell(b) = \log L(b \mid X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} -n \log b & \text{pokud } b \geq \max(X_1, \dots, X_n) \\ -\infty & \text{jinak} \end{cases}$$

I $\quad \hat{b}_{MLE} = M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

nestrannost ?

$$F_{M_n}(x) = \left(F_X(x)\right)^n = \left(\frac{x}{b}\right)^n \qquad 0 \le x \le b$$

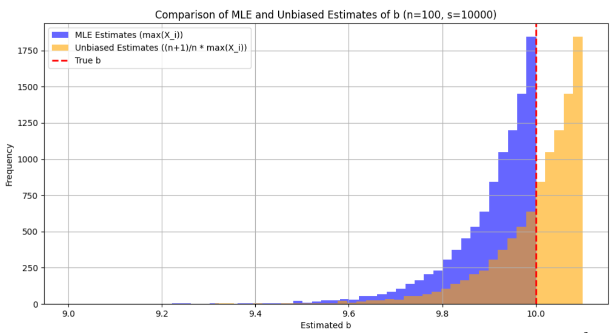
$$f_{M_n}(x) = \frac{d}{dx} F_{M_n}(x) = n\left(F_X(x)\right)^{n-1} f_X(x) = n\left(\frac{x}{b}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{b} \qquad 0 \le x \le b$$

$$EM_n = \int_0^b x \; n\left(\frac{x}{b}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{b}\, dx = \int_0^b n\left(\frac{x}{b}\right)^n dx = \frac{n}{b^n}\int_0^b x^n\, dx =$$

$$= \frac{n}{b^n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^b = \frac{n}{b^n}\,\frac{b^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\, b \xrightarrow{n\to\infty} b$$

II. $\hat{b} = \frac{n+1}{n} \cdot M_n$

$$E\hat{b} = E\left(\frac{n+1}{n} M_n\right) = \frac{n+1}{n} E(M_n) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1}\, b = b$$



d) $\theta = P[X \le 10]$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le 10)$$

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } A \text{ splněna} \\ 0 & \text{pokud ne} \end{cases}$$

$$E\hat{\theta} = E\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le 10)$$

$$= \frac{n}{n} E\, I(X_1 \le 10) = P[X_1 \le 10] = \theta$$

$$I(X_1 \le 10) = \begin{cases} 1 & \text{s pravděpodobností } \theta \\ 0 & \text{s pravděpodobností } 1-\theta \end{cases}$$

$$var(\hat{\theta}) = var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i \le 10)\right) = \frac{1}{n^2}\, n \cdot var\left(I(X_1 \le 10)\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

2. V rybníce plave 100 rybiček, z nichž a je zlatých, kde $a > 0$ je neznámé číslo. Rádi bychom odhadli a. Budeme uvažovat následující postupy a odhady.

   (a) Vylovíme postupně s vracením 10 rybiček a pro každou zaznamenáme, zda je zlatá. Odhadněte na základě tohoto pokusu neznámé a. Dále vyšetřete střední hodnotu a rozptyl tohoto odhadu.

   (b) Nyní vylovíme najednou 10 rybiček (tj. bez vracení). Odhadněte na základě tohoto pokusu neznámé a a opět vyšetřete střední hodnotu a rozptyl tohoto odhadu.

   (c) Nyní budeme postupně lovit rybičky s vracením, ale pouze dokud nevylovíme první zlatou rybičku. Zaznamenáme si počet pokusů. Navrhněte odhad a z těchto dat.

   (d) Provedeme podobný pokus jako v předchozím bodě, ale nyní lovíme, dokud nevylovíme popáté zlatou rybičku (do rybníka vracíme i zlaté rybičky). Navrhněte odhad a z těchto dat.

k - počet vylovených zlatých

a) $p = \frac{a}{100}$ $\qquad \hat{a}_{10} = 10k = 100\,\overline{X}_{10}$

$Bi\left(10, \frac{a}{100}\right)$ $\qquad E\hat{a}_{10} = 100 \cdot EX_1 = a$

$$\mathrm{var}(k) = n \cdot p(1-p)$$

$$\mathrm{var}(\hat{a}) = \mathrm{var}(10k) = 10^2 \cdot \mathrm{var}(k)$$
$$= 100 \cdot 10 \cdot \frac{a}{100}\left(1 - \frac{a}{100}\right)$$
$$= 10a\left(1 - \frac{a}{100}\right)$$
$$= 10a - \frac{10a^2}{100} =$$
$$= \frac{a(100-a)}{10}$$

b) hypergeometrické rozdělení $\qquad E(X) = \frac{n \cdot a}{100} \overset{u\ nás}{=} \frac{a}{10}$

$$\mathrm{var}(X) = n\frac{A}{N}\left(1 - \frac{A}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$\hat{a} = \frac{100}{10} \cdot k$ $\qquad k$.. počet vytažených zlatých

$= 10k$

$$E(\hat{a}) = 10\,E(k) = 10 \cdot \frac{a}{10} = a$$

$$\mathrm{var}(\hat{a}) = 10^2 \cdot \mathrm{var}(k) = 10^2 \cdot n\frac{a}{100}\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(\frac{100-10}{99}\right) =$$
$$= 10a\left(1 - \frac{a}{100}\right)\left(\frac{90}{99}\right) =$$
$$= \frac{a(100-a)}{10} \cdot \frac{90}{99}$$

rozptyl s vracením

c) geometrické rozdělení $P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ $\quad$ $\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$\hat{p} = \frac{1}{k}$ $\qquad p = \frac{a}{100}$ $\qquad \hat{a} = 100 \cdot \hat{p} = \underline{100 \cdot \frac{1}{k}}$

d) ~~binomické~~ negativní binomické rozdělení : sekvence 0 a 1 ... 1001 0100 ... 1

(Wikipedie # failů k, než uvidíme r úspěchů.. $E(X=k) = r\frac{(1-p)}{p}$

\# všech pokusů = $r+k$

$E(Y_r = r+k) = r + E(X=k) = r + r\frac{(1-p)}{p} = r\left(1 + \frac{(1-p)}{p}\right) = \frac{r}{p}$)

R.. počet úspěchů

$\mathbb{E}(Y_r) = \frac{r}{p} = \frac{5}{\frac{a}{100}} = \frac{500}{a}$

$\hat{a} = \frac{500}{y_5}$ $\qquad y_r$ ... pozorovaný počet pokusů než uvidíme y_5 zlatých ryb