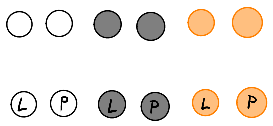
1. V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme z šuplíku 3 ponožky. Označme jako X počet vytažených bílých ponožek a Y je počet vytažených černých ponožek.
   (a) Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^\top$.
   (b) Jsou X a Y nezávislé?
   (c) Spočtěte kovarianci a korelaci X a Y.
   (d) Spočtěte rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $U = X - Y$.
   (e) Nechť Z značí počet černých ponožek, které zůstaly v šuplíku. Určete pravděpodobnostní rozdělení $(X, Z)^\top$ a kovarianci X a Z.



$Y \backslash X$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	

$\binom{6}{3} = 20$

b) NE

c) $EX = 1$ $\quad (0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5})$

$EY = 1$

$\mathrm{var}\, X = EX^2 - (EX)^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{5} + 1^2 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} - 1 = \frac{2}{5}$

$\mathrm{cov}(X,Y) = EXY - EX\,EY$ $\quad EXY = 1 \cdot \frac{8}{20} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$= \frac{4}{5} - 1 \cdot 1 = -\frac{1}{5}$

$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}\, X \cdot \mathrm{var}\, Y}} = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = -\frac{1}{2}$

$U = X - Y$

$P(U = -2) = \frac{1}{10}$

$P(U = -1) = P(X=1, Y=2) + P(X=0, Y=1) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$

$P(U = 0) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

$P(U = 1) = P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}$

$P(U = 2) = \frac{1}{10}$

$\mathrm{cov}(X, 2-Y) = \mathrm{cov}(X, -Y) = -\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{5}$

2. Náhodný vektor $(X,Y)^\top$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Určete $c > 0$ tak, aby f byla hustota.
(b) Spočtěte kovarianci $\mathsf{Cov}(X,Y)$.
(c) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé,

a) $$c\int_0^1\int_0^1 xy \, dx\, dy = c\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y\right]_0^1 dy = c\int_0^1 \frac{1}{2} y \, dy = \frac{c}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{c}{4} \qquad \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

b) $$f_X(x) = 4\int_0^1 xy\, dy = 4x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2x$$

$$EX = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \qquad EY = \frac{2}{3} \text{ symetrie}$$

$$EXY = \int_0^1\int_0^1 xy \; 4xy \, dx\, dy = \int_0^1 4y^2 \underbrace{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}_{\frac{1}{3}} dy =$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{9}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EX\,EY = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = 0$$

c) $f_X(x) = 2x \quad f_Y(y) = 2y \qquad f_X(x)\cdot f_Y(y) = 4xy = f(x,y)$

Ano, jsou nezávislé

3. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(-1, 1)$. Označme $Y = X^2$. Spočtěte kovarianci veličin X a Y a jejich korelační koeficient ρ_{XY}. Jsou X a Y nezávislé?

$X \sim R[-1,1]$

$f(x) = \frac{1}{2}$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$

$= 0$ jinak

$$EX = \int_{-1}^{1} x \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

$$EX^2 = EY = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

$$EY^2 = EX^4 = \int_{-1}^{1} x^4 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$EXY = EX^3 = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = EXY - EXEY = 0 - 0 \cdot \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{corr}(X,Y) = 0$$

$$P\left(X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Y \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)\right) = 0$$

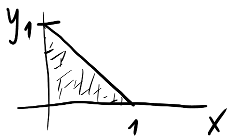
$$P\left(X \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \qquad P\left(Y \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)\right) = P\left(X \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) = \frac{1}{2}$$

$0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$ jsou závislé

4. Náhodný vektor $(X,Y)^\top$ má rovnoměrné rozdělení na množině $M = \{(x,y) : 0 \le y \le 1-x, \quad 0 \le x \le 1\}$, tj. spojité rozdělení s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{pro } 0 \le y \le 1-x, \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{jinak ,} \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c > 0$, aby f byla hustota.
(b) Rozhodněte, zda jsou X a Y nezávislé.
(c) Spočtěte kovarianci a korelaci X a Y.



$$\int_0^1 \int_0^{1-x} c \; dy\, dx = c \int_0^1 [y]_0^{1-x} \, dx = c \int_0^1 1-x \; dx = c \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= c \cdot \frac{1}{2} \qquad\qquad c \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2 \; dy = 2(1-x)$$

$$EX = \int_0^1 x\,(2-2x)\,dx = 2\int_0^1 x - x^2 dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} = EY$$

$$f_Y(y) = 2(1-y)$$

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = 2(1-x)(1-y) = 2(1 - x - y + xy) \neq f(x,y)$$

nejsou nezávislé

$$EXY = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \; 2 \; dy\, dx = \int_0^1 2x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 x(1-x)^2 dx = 2\int_0^1 x^3 - 2x^2 + x \; dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3-4}{36} = -\frac{1}{36}$$

$$\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \int_0^1 x^2\, 2(1-x)\,dx = 2\int_0^1 x^2 - x^3\,dx =$$

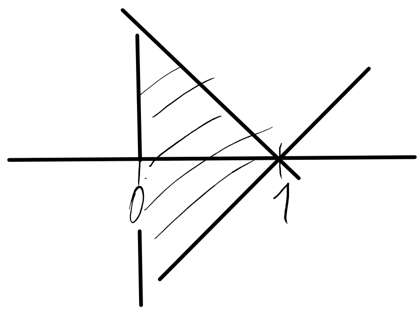
$$= 2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\right) = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{var}(X) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3-2}{18} = \frac{1}{18}$$

$$\mathrm{var}(Y) = \frac{1}{18}$$

$$\mathrm{corr}(X,Y) = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}} = -\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = -\frac{1}{2}$$

5. Řešte předchozí příklad pro množinu $M = \{(x,y) : x-1 \leq y \leq 1-x, \quad 0 \leq x \leq 1\}$.



6. Uvažujme posloupnost n znaků, ve které se každý znak zkreslí s pravděpodobností $p \in (0,1)$, a to nezávisle na ostatních znacích. Nechť X značí počet takto zkreslených znaků. Dále označme jako Y_i identifikátor toho, zda se i-tý znak zkreslí. Vyjádřete X pomocí veličin $Y_1, \dots, Y_n$ a pomocí tohoto vyjádření spočtěte $\mathsf{E}X$ a $\mathsf{Var}\,X$.

Y_i .. zkreslí se s p

$$EY_i = 0 \cdot (1-p) + 1p = p$$

$$X = \sum_i Y_i$$

$$EX = \sum_i EY_i = np \qquad X \sim Bi(n,p)$$

$$\operatorname{var} Y_i = p - p^2 = p(1-p)$$

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^n \underbrace{a_i}_{1} X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\,X_i + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j \underbrace{\mathsf{Cov}\,(X_i, X_j)}_{0}$$

0 protože nezávislé

$$\operatorname{var} X = \sum \operatorname{var} Y_i = np(1-p)$$