1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Y udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.

   (a) Odvoďte rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)^T$.

   (b) Jaké jsou marginální rozdělení X a Y?

   (c) Jsou veličiny X a Y nezávislé?

Y \ X (počet dcer)	0	1	2	3	
0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
2 (počet bratrů nejmladšího dítěte)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

nejml			X	Y
1	1	1	0	2
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	2
1	0	0	2	0
0	1	0	2	1
0	0	1	2	1
0	0	0	3	0

$X \sim Bi\left(2, \frac{1}{2}\right)$

$Y \sim Bi\left(3, \frac{1}{2}\right)$

NE (stačí 1 políčko, které není součin marginálů)

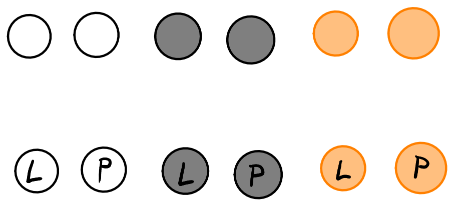
2.(a) Nechť Z je počet mladších sester nejstaršího dítěte v rodině z příkladu 1. Napište sdružené a marginální rozdělení $(X, Z)^T$ a porovnejte s rozdělením $(X, Y)^T$.

(b) Navrhněte na pravděpodobnostním prostoru z příkladů 1 a 2 dvojici náhodných veličin $(U, V)^T$, které jsou nezávislé.

Z (počet sester nejstaršího dítěte)	Y \ X (počet dcer)	0	1	2	3
0	0	0 $\frac{1}{8}$	0 $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$ 0	$\frac{1}{8}$ 0
1	1	0 0	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$	0 0
2	2 (počet bratrů nejmladšího dítěte)	$\frac{1}{8}$ 0	$\frac{1}{8}$ 0	0 $\frac{1}{8}$	0 $\frac{1}{8}$

nejml		nejst	X	Y	Z
1	1	1	0	2	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	2	1
1	0	0	2	0	1
0	1	0	2	1	1
0	0	1	2	1	2
0	0	0	3	0	2

3. V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme z šuplíku 3 ponožky. Označme jako X počet vytažených bílých ponožek a Y je počet vytažených oranžových ponožek.
   (a) Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)'$. Určete, s jakou pravděpodobností jsou mezi třemi vytaženými ponožkami alespoň dvě stejné.
   (b) Jsou X a Y nezávislé?



$Y \backslash X$	0	1	2	
0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	

$\binom{6}{3} = 20$

$P(\text{alespoň dvě stejné}) = 1 - P(1\,1\,1)$

$= 1 - \frac{8}{20}$

$= \frac{3}{5}$

4. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny X a Y. Ze zkušenosti víte, že vektor $(X, Y)'$ má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{pro } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak}. \end{cases}$$

   (a) Určete konstantu $c > 0$.
   (b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte více než za jídlo?

a) $\int_0^1\int_0^1 c(x+y)\,dx\,dy = c\int\left[\frac{x^2}{2} + yx\ dy\right]_0^1 dy = c\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = c\left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$

$= c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = c \cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$

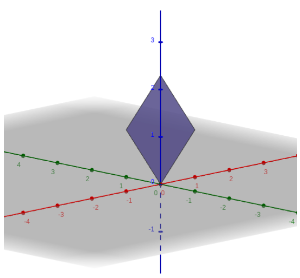
b) $f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 x+y\ dx = \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_0^1 = \frac{1}{2} + y$

$f_X(x) = \int_0^1 x+y\ dy = \left[\frac{y^2}{2} + yx\right]_0^1 = \frac{1}{2} + x$

$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} + y\right) = \frac{1}{4} + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + xy \neq x+y \Rightarrow$ NEJSOU NEZÁVISLÉ

$x > y$:

$\int_0^1\int_y^1 x+y\ dx\,dy =$



$\int_0^1\left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_y^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{2} - y^2\ dy = \left[\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5. Náhodná veličina X udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina Y udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor $(X,Y)^T$ má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0,\ y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?

(b) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?

(c) S jakou pravděpodobností je doba čekání na tramvaj delší než doba čekání na metro?

a) $f_X(x) = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-x-y/2}\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-x} \cdot e^{-\frac{y}{2}}\, dy =$

$= \frac{1}{2} e^{-x} \int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}}\, dy = \frac{1}{2} e^{-x} \left[-2 e^{-\frac{y}{2}}\right]_0^\infty = e^{-x}$

b) $f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-x} e^{-\frac{y}{2}}\, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \left[-e^{-x}\right]_0^\infty =$

$= \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$

$f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2} e^{-x-\frac{y}{2}} = f(x,y) \Rightarrow$ jsou nezávislé

c) $P(X > Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty \frac{1}{2} e^{-x} e^{-\frac{y}{2}}\, dx\, dy = *$

$\int_y^\infty \frac{1}{2} e^{-x} e^{-\frac{y}{2}}\, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \int_y^\infty e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \left[-e^{-x}\right]_y^\infty = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} e^{-y} = \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}y}$

$* = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{3}{2}y}\, dy = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}y}\right]_0^\infty = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$