1. Předpokládejte, že máme k dispozici perfektní generátor náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$. Označme jako X náhodnou veličinu, která nám udává vygenerované číslo.

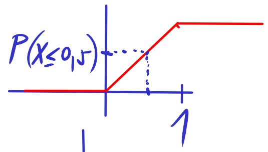
   (a) Jakým způsobem popíšeme rozdělení X? Zapište a nakreslete graf.

   (b) Nakreslete graf distribuční funkce. V obou obrázcích zakreslete pravděpodobnost, s jakou dostaneme číslo menší než 0.5. S jakou pravděpodobností dostaneme přesně 0.5?

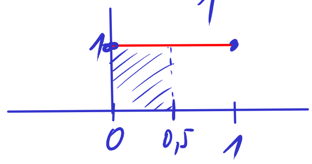
   (c) Získané náhodné číslo X umocníme na druhou a dostaneme tak jiné náhodné číslo Y z intervalu $[0, 1]$. Je rozdělení Y stejné jako rozdělení X?

   (d) Jak pomocí X dostaneme náhodné číslo z intervalu $[a, b]$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$?

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ x & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 1 & x \in (1, \infty) \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



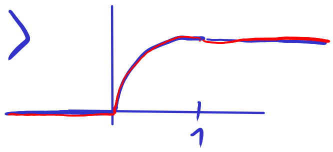
$P(X = 0{,}5) = 0$

$F_X(\sqrt{x})$

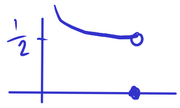
$x \le 0$

$=0$

c) $F_Y(x) = P(X^2 \le x) = P(X \le \sqrt{x}) = \sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$



$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$



d) $X \cdot (b - a) + a$

2. Doba strávená čekáním na příjezd vlaku (v minutách) je náhodná veličina s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/5}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(a) Určete konstantu $c > 0$, aby f byla hustota.

(b) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji.

(c) Jaká je pravděpodobnost, že budete na vlak čekat déle než 5 minut? Vyznačte v grafu hustoty a v grafu distribuční funkce.

(d) S jakou pravděpodobností bude doba strávená čekáním mezi 2 a 5 min?

(e) Aktuálně čekáte 5 min. Jaká je pravděpodobnost, že budete celkově čekat déle než 10 min?

(f) Během čekání na vlak si prohlížíte internet na mobilu, přičemž Vám za to Váš operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč a pak spojitou sazbu 3Kč/min. Náhodná veličina Y udává, kolik peněz takto utratíte. Určete rozdělení Y (distribuční funkci a hustotu) a spočtěte, s jakou pravděpodobností utratíte během čekání na vlak více než 35 Kč.

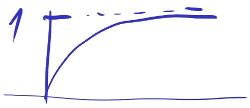
(g) Váš kamarád má jiný tarif: Operátor mu účtuje 1 Kč za každou započatou minutu. Náhodná veličina Z udává, kolik peněz utratí během čekání na vlak Váš kamarád. Určete rozdělení Z.

(h) Určete rozdělení náhodné veličiny $U = F(X)$, kde F je distribuční funkce spočtená v (b).

(i) Navrhněte, jak nasimulovat výše uvedené doby čekání, umíme-li generovat náhodné číslo z intervalu $[0, 1]$.

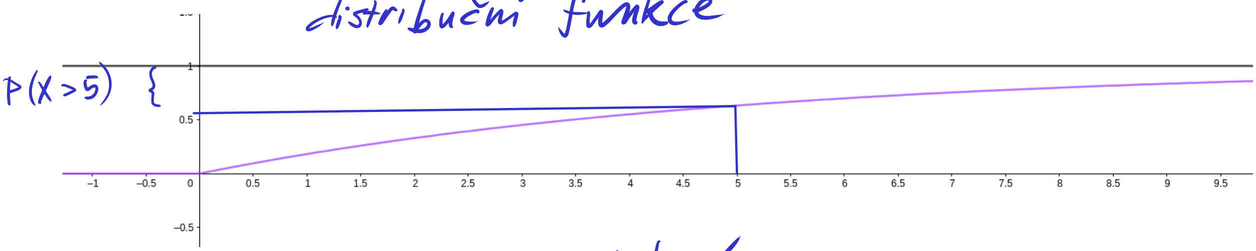
a) $\int_0^\infty c e^{-x/5}\,dx = 1 \quad \left|\begin{array}{l} y = \frac{x}{5} \\ 5dy = dx \end{array}\right| \quad 5c\int_0^\infty e^{-y}\,dy = 5c\left[-e^{-y}\right]_0^\infty = 5c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{5}$

$F(t) = \int_0^t \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_0^t = -e^{-\frac{t}{5}} + 1 = 1 - e^{-\frac{t}{5}}$



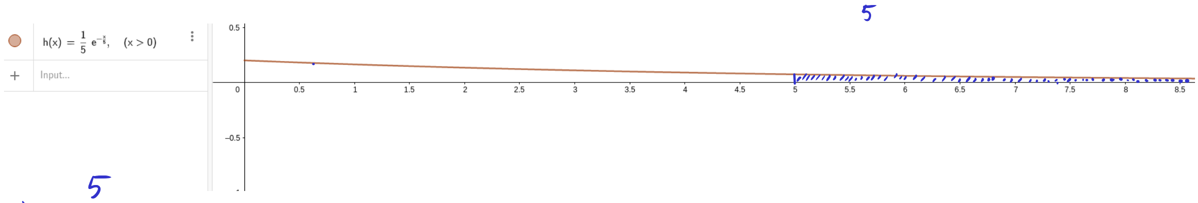
$t \geq 0$

distribuční funkce



hustota rozdělení

$\int_5^\infty f(x)\,dx$



d) $\int_2^5 \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}\,dx = P(X \leq 5) - P(X \leq 2) = F(5) - F(2) = (1 - e^{-1}) - (1 - e^{-\frac{2}{5}}) = e^{-\frac{2}{5}} - e^{-1}$

Input

$e^{-2/5} - \frac{1}{e}$

Decimal approximation

0.302440604864196979

e) $P(X > 10 \mid X > 5) = \frac{1 - F(10)}{1 - F(5)} = \frac{e^{-2}}{e^{-1}} = e^{-1} = P(X > 5)$

f) $Y = 5+3X$ $\qquad F_Y(y) = P(Y \le y) = P(5+3X \le y) =$

$X = \frac{Y-5}{3}$ $\qquad = P\left(X < \frac{y-5}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-5}{3}\right)$

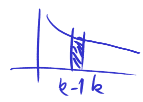
$$F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{\frac{y-5}{3}}{5}} = 1 - e^{-\frac{y-5}{15}} \quad \text{pro } y \ge 5$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{15} e^{-\frac{y-5}{15}} \quad y \ge 0$$
$$= 0 \quad \text{jinak}$$

$$P(Y > 35) = P(X > 10) = e^{-2} \quad \text{(viz výše)}$$

g) diskrétní rozdělení:

$$P(Z = k) = P(k-1 \le X < k) = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{k-1}^{k} =$$



$$P(X \le 1) = \underline{1 - e^{-\frac{1}{5}}}$$
$$P(X \le 2) = 1 - e^{-\frac{2}{5}}$$

$$P(1 \le X \le 2) = 1 - e^{-\frac{2}{5}} - 1 + e^{-\frac{1}{5}} =$$
$$= e^{-\frac{1}{5}} - e^{-\frac{2}{5}} = \underline{e^{-\frac{1}{5}}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right)}$$

$$P(2 \le X \le 3) = 1 - e^{-\frac{3}{5}} - 1 + e^{-\frac{2}{5}} =$$
$$= e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{3}{5}} = e^{-\frac{2}{5}}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right) = \underline{\left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^2\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right)}$$

$\vdots$

$$P(k-1 \le X \le k) = 1 - e^{-\frac{k}{5}} - 1 + e^{-\frac{k-1}{5}} =$$
$$= e^{-\frac{k-1}{5}} - e^{-\frac{k-1}{5}} e^{-\frac{1}{5}} =$$
$$= e^{-\frac{k-1}{5}}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\frac{1}{5}}\right)$$

$$q = 1 - e^{-\frac{1}{5}}$$

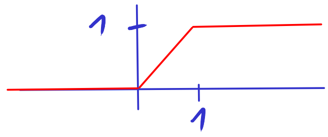
$$P(Z = k) = P(k-1 \le X \le k) = (1-q)^{k-1} q$$

geometrické rozdělení

h) $F_Y(y)$ $\qquad Y = F(X)$ $\qquad$ pro $y \in [0,1]$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(F_X(X) \le y) = P(X \le F_X^{-1}(y)) = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

$F_Y(y) = y$ pro $y \in [0,1]$



rovnoměrné rozdělení

i) U rovnoměrné z $[0,1]$ $\rightarrow$ $F_X(t) = 1 - e^{-\frac{t}{5}}$

$X = F_X^{-1}(U)$ $\quad F_X^{-1}(u) = -5\log(1-u)$

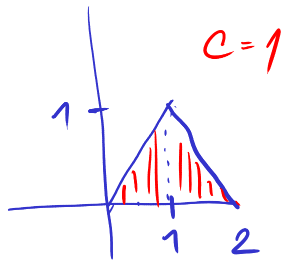
$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) \\
&= P(-5\log(1-U) \leq x) \\
&= P\left(\log(1-U) \geq -\tfrac{x}{5}\right) \\
&= P\left(1-U \geq e^{-\frac{x}{5}}\right) \\
&= P\left(U \leq 1-e^{-\frac{x}{5}}\right) \\
&= F_U\left(1-e^{-\frac{x}{5}}\right) \qquad F_U(u) = u \\
&= 1 - e^{-\frac{x}{5}}
\end{aligned}
$$

3. Uvažujte náhodnou veličinu X se spojitým rozdělením s hustotou

$$
f(x) = \begin{cases} c(1-|x-1|) & x \in (0,2) \\ 0 & \text{jinak}\ . \end{cases}
$$

(a) Nalezněte konstantu $c > 0$, tak aby f byla hustota.
(b) Spočítejte, s jakou pravděpodobností bude X větší než $1/2$.
(c) Určete distribuční funkci X a nakreslete její graf.

a)
$$
f(x) = \begin{cases} c(1-(x-1)) = c(2-x) & \text{pro } x \in (1,2) \\ c(1+x-1) = cx & x \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}
$$



$c = 1$

b) $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

c) $F_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ $\qquad t \in (0,1)$: $\int_0^t x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}$

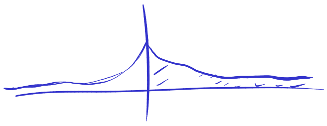
$t \in \langle 1,2)$:

$$
P(X \leq 1) + \int_1^t 2 - x\,dx \ \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^t = 2t - \frac{t^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2t - \frac{t^2}{2} + 1
$$

$t \geq 2$: $\quad F_X(t) = 1$

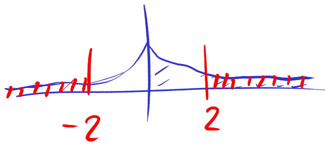
$t \leq 0$: $\quad F_X(t) = 0$

4. Uvažujte spojité rozdělení s hustotou $f(x) = ce^{-|x|}$. Dopočítejte konstantu c a určete, s jakou pravděpodobností bude náhodná veličina s tímto rozdělením v absolutní hodnotě větší než 2.



$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$



$$P(|X| > 2) = 2 \cdot P(X > 2)$$

$$= 2 \cdot \int_2^\infty \frac{1}{2} e^{-x}\,dx = \int_2^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_2^\infty = e^{-2}$$