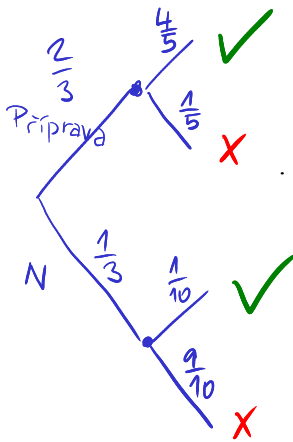


1. Student, který se na zápočtovou písemku z Pravděpodobnosti a statistiky učil, ji úspěšně napíše s pravděpodobností 0,8. Naopak student, který se neučil, uspěje s pravděpodobností 0,1. Spočtete, s jakou pravděpodobností se student, který napsal úspěšně písemku, učil, pokud studenti, kteří se svědomitě připravují tvoří

- (a) dvě třetiny všech studentů,  
 (b) desetinu všech studentů.

$P$  - Příprava,  $P$  - pravděpodobnost  
 $U$  - úspěš



$$P(P|U) = \frac{P(U|P) \cdot P(P)}{P(U)}$$

$$P(U) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{15} + \frac{1}{30} = \frac{17}{30}$$

$$P(P|U) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{17}{30}} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{30}} = \frac{16}{17}$$

b)  $P(P) = \frac{1}{10}$  :

$$P(U) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{17}{100}$$

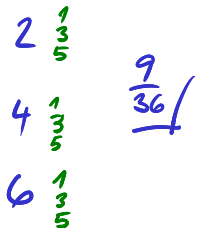
$$P(P|U) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{17}{100}} = \frac{8}{17}$$

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy  $A$ =[na modré kostce padlo sudé číslo],  $B$ =[na zelené kostce padlo liché číslo],  $C$ =[součet čísel je lichý].

- (a) Určete podmíněnou pravděpodobnost jevu  $A$ , když víme, že nastal jev  $C$ .  
 (b) Jsou jevy  $A, B$  a  $C$  po dvou nezávislé?  
 (c) Jsou jevy  $A, B, C$  nezávislé?

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{1}{2}$$

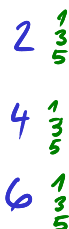
$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \quad \leftarrow \text{sudé na modré & součet lichý}$$



b) ano (podobně ověříme každou dvojici, např.  $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ )

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

c) ne:  $A \cap B \cap C$  :



$\Sigma$  máty lichý:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

3. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance. Pravděpodobnosti zásahu jsou po řadě rovny 0,2, 0,4 a 0,6 a lovci střílí nezávisle na sobě.

- (a) S jakou pravděpodobností kance zastřelil první střelec, byl-li kanec zasažen jedinou střelou?  
 (b) Nechť náhodná veličina  $X$  udává počet střel, které zasáhly kance. Určete rozdělení  $X$  a nakreslete distribuční funkci.

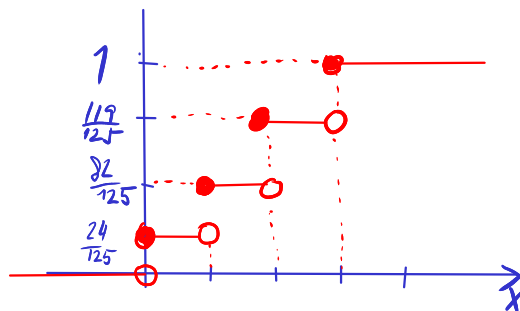
$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(1. \text{zasáhl} \mid 1 \text{ střela}) &= \frac{P(1 \text{ střela} \mid 1. \text{zasáhl}) \cdot P(1. \text{zasáhl})}{P(1 \text{ střela})} \\
 &= \frac{0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,2}{0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,6} \\
 &= \frac{48}{464} = \frac{3}{29}
 \end{aligned}$$

$$P(X=0) = \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{1000} = \frac{24}{125}$$

$$P(X=1) = \frac{58}{125} \quad (\text{jmeňoval předchozího})$$

$$P(X=2) = 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = \frac{37}{125}$$

$$P(X=3) = \frac{6}{125}$$



$P(X \leq x)$

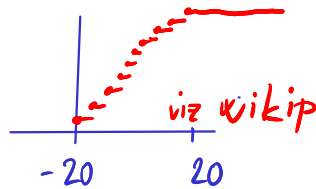
4. Test obsahuje  $n$  otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtnává odpovědi zcela náhodně. Označme  $X$  počet správně zodpovězených otázek.

- (a) Odvodte rozdělení veličiny  $X$  a načrtněte graf distribuční funkce.  
 (b) Za každou správnou odpověď dostane student 2 body a za špatnou naopak 2 body ztratí. Určete pro  $n = 10$  rozdělení náhodné veličiny  $Y$ , která udává celkový počet bodů studenta.

a) 1001001  $P(X=k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$  Binomické rozdělení  
 viz wikipedie  $\uparrow$  # sekvencí s  $k$  jedničkami

b)

X	Y
#1:	bodů
0	-20
1	-16
2	-12
3	-8
4	-4
5	0
6	4
7	8
8	12
9	16
10	20



5. Adam hází opakovaně na basketbalový koš, dokud se netrefí. V každém hodu se trefí s pravděpodobností 0,2, a to nezávisle na svých předchozích výsledcích.
- Nechť náhodná veličina  $X$  udává celkový počet hodů na koš. Určete rozdělení této náhodné veličiny.
  - S jakou pravděpodobností hodí Adam více než pětkrát?
  - S jakou pravděpodobností hodí Adam více než desetkrát, když se ani pátým pokusem netrefil?

a)  $P(X = k) = 0,8^{k-1} \cdot 0,2$

b)  $0,8^5$

c)  $0,8^5$

Geometrické rozdělení („nemá paměť“)

$$P(X > 10 | X > 5) = \frac{P(X > 10, X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{0,8^{10}}{0,8^5} = 0,8^5$$

6. Nyní se v házení na koš střídají Adam a Bedřich. Adam se v každém svém pokusu trefí s pravděpodobností 0,2 a Bedřich s pravděpodobností 0,3, a to nezávisle na svých předchozích výsledcích a výsledcích protihráče. Hra končí ve chvíli, kdy padne první koš.

- Náhodná veličina  $X$  udává celkový počet hodů na koš. Určete její rozdělení.
- Je pravděpodobnější, že vyhraje celou hru Adam nebo Bedřich?

Předpokládáme, že Adam začíná:

a)  $P(X = 2k) = 0,8^k \cdot 0,7^{k-1} \cdot 0,3$

$$P(X = 2k-1) = 0,8^{k-1} \cdot 0,7^{k-1} \cdot 0,2 \quad k \in \mathbb{N}$$

b)  $P(A \text{ vyhraje}) = P(X = 2k-1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k-1) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (0,8 \cdot 0,7)^{k-1} \cdot 0,2 = \frac{2}{1 - \frac{56}{100}} = \frac{2}{\frac{44}{100}} = \frac{20}{44} = \frac{5}{11}$$