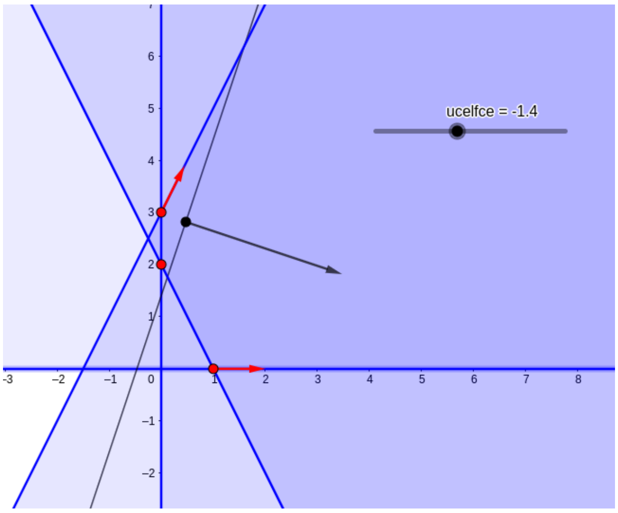
Přímá metoda řešeni LP

Příklad 5.1. Řešte graficky následující úlohu:

$$\max \quad 3x_1 - x_2$$

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\min & 3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{za podmínek} & 2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\
 & -4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



→ standardni tvar

$$
\begin{array}{rl}
\min & c^T x \\
\text{za podmínek} & Ax = b \\
 & x \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcccl}
\min & 3x_1 & - & x_2 & & & & \\
\text{za podmínek} & 2x_1 & + & x_2 & -\boxed{x_3} & & = & 2 \\
 & -4x_1 & + & 2x_2 & & +\boxed{x_4} & = & 6
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definice 3.11.: *Uvažujme matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, která má plnou řádkovou hodnost. Vyberme nějakou množinu indexů proměnných $L \subset \{1,2,\dots,n\}$ tak, aby obsahovala právě m různých položek. Vezměme příslušné sloupce matice A a sestavme z nich čtvercovou matici $A_L = (A_{j,i},\ j \in \{1,2,\dots,m\}, i \in L)$.*

- *Pokud je matice A_L regulární, pak říkáme, že L je <u>báze</u> úlohy (3.4).*
- *Když L je báze úlohy (3.4), pak k ní přísluší $x(L) \in \mathbb{R}^n$, které je jednoznačně určené podmínkami $Ax(L) = b$ a $x(L)_i = 0$ pro všechna $i \notin L$. Bod $x(L)$ nazýváme <u>bazické řešení</u> příslušné k bázi L.*
- *Nechť L je báze úlohy (3.4) a bazické řešení $x(L)$ je nezáporné. Pak mluvíme o <u>přípustné bázi</u>.*
- *Nechť L je báze úlohy (3.4) a příslušné bazické řešení $x(L)$ je optimálním řešením úlohy (3.4). Pak mluvíme o <u>optimální bázi</u>.*
- *Říkáme, že x je <u>bazické řešení</u> úlohy (3.4), jestliže existuje báze L tak, že $x = x(L)$.*
- *Říkáme, že x je <u>přípustné bazické řešení</u> úlohy (3.4), jestliže existuje přípustná báze L tak, že $x = x(L)$.*
- *Říkáme, že x je <u>optimální bazické řešení</u> úlohy (3.4), jestliže existuje optimální báze L tak, že $x = x(L)$.*

Uvědomme si, že bazické řešení je opravdu jednoznačně určeno příslušnou bází.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

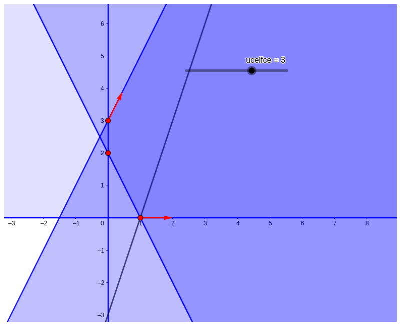
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lemma 3.12.: *Nechť $L \subset \{1,2,\dots,n\}$ je báze úlohy (3.4). Potom příslušné bazické řešení je určeno jednoznačně a je tvaru $x(L)_L = (A_L)^{-1} b$, $x(L)_i = 0$ pro $i \notin L$.*

Věta 3.13.: *Pokud matice A má plnou řádkovou hodnost, pak množina $\operatorname{ext}(M)$ je rovna množině všech přípustných bazických řešení.*

Věta 3.13 dává návod jak numericky počítat krajní body M:
Projdeme postupně všechny možnosti volby $L \subset \{1,2,\dots,n\}$, $\operatorname{card}(L) = m$. Pokud A_L není regulární přejdeme k další volbě L. Když je A_L regulární, pak řešíme soustavu $A_L\xi = b$, tj. $\xi = (A_L)^{-1} b$. Když $\xi \geq 0$, pak jsme nalezli $x(L)$ krajní bod M, kde $x(L)_L = \xi = (A_L)^{-1} b$, $x(L)_{I\setminus L} = 0$.



Lístek s poznámkou 29.03.20 11:13
Martin Branda
Tento vztah platí pouze jako inkluze, tj. všechny krajní směry jsou obsaženy v takto charakterizované množině. Abychom dostali rovnost, je potřeba přidat podmínku na plnou řádkovou hodnost, viz odstavec níže "Věta 3.14 dává ...".

Věta 3.14.: *Pokud hodnost matice A je m, pak platí*

$$\operatorname{extd}(M) = \left\{ y \in \mathsf{direct}(M) \,:\, \operatorname{card}\left(S^+(y)\right) \leq m+1,\ \|y\| = 1 \right\}. \tag{3.9}$$

Důkaz: Důkaz je uveden například v [1], věta 2.6.6., p.70.

Q.E.D.

Věta 3.14 dává návod jak numericky počítat krajní směry M:
Projdeme postupně všechny možnosti volby $K \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, card $(K) = m+1$. Pokud A_K nemá plnou řádkovou hodnost, přejdeme k další volbě K. Když A_K má plnou řádkovou hodnost, pak nalezneme netriviální řešení soustavy $A_K \eta = 0$. Když $\eta \geq 0$, pak jsme nalezli $y(K)$ krajní směr M, kde $y(K)_K = \frac{1}{\|\eta\|}\eta$, $y(K)_{I \setminus K} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešení optimalizační úlohy:

(1) Neexistuje-li žádný krajní bod, úloha nemá řešení.
(2) Pokud v nějakém krajním směru má účelová funkce zápornou hodnotu, úloha nemá řešení, funkce neomezeně klesá v tomto směru.
(3) Jinak je jedním z optimálních řešení některý z krajních bodů, ten s nejmenší hodnotou účelové funkce.
    - Pokud takových bodů je více, je řešením i úsečka mezi těmito body.
    - Pokud má navíc účelová funkce nulovou hodnotu pro nějaký krajní směr s^*, úloha má nekonečně mnoho řešení, která jsou tvaru $x^* + ts^*, t \geq 0$, kde x^* je krajní bod s nejmenší hodnotou účelové funkce.