Úvod do optimalizace

Zápočtový test

Příklad 1. [3 b.] Ve firmě pracují tři týmy mající následující omezení na celkové počty hodin, které mohou v jednom týdnu odpracovat: 200, 240, 260. Každý tým může v jednom týdnu pracovat na více výrobcích, avšak ne zároveň. Vedení firmy chce zpracovat v týdnu čtyři zakázky na různé výrobky v počtu kusů: 450, 320, 430, 140. Každý tým je schopný za hodinu své práce vyrobit jiný počet kusů, který je uvedený v následující tabulce:

	# výrobků za hodinu			
Tým/Výrobek	1	2	3	4
1	3,3	4,4	2,8	1,9
2	3,1	5,1	2,3	3,1
3	5,2	3,0	4,2	4,5

Hodina jednotlivých týmů stojí firmu 700, 750, 890 Kč. Sestavte optimalizační úlohu, kde budou minimalizovány náklady firmy za daných omezení na týmy a požadavcích na zakázky. Doplňte slovním komentářem význam proměnných i omezení. Kladně je hodnocen obecný zápis (pro nespecifikovaný počet týmů a výrobků, obecných cen) modelu – tak, jak byste jej nejspíš implementovali. Pakliže úloha nabízí více možných interpretací, můžete slovně rozvést, jak ji chápete, a co by případně znamenala alternativní interpretace. Úlohu neřešte.

Příklad 2. [4 b.] Rozhodněte, zda je následující funkce konvexní. Svoji odpověď zdůvodněte.

$$f(x,y) = (x+y)^2 + \log(e^{x+y}+1), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3. [8 b.] Vyřešte následující optimalizační úlohu:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 2 \\ \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Nalezněte optimální řešení $x^\star$, hodnotu účelové funkce v tomto bodě a hodnoty duálních proměnných příslušné ke každému omezení.

Příklad 4. [5 b.] Pomocí Farkasovy věty zjistěte, zdali je následující množina neprázdná:

$$\{x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \ge 1,\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 \ge 3,\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge -3\}$$

pro $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \le 0, x_4 \ge 0$.