

$$\begin{array}{ll}
 f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \max & g(\mathbf{u}) = \mathbf{b}^T \mathbf{u} \rightarrow \min \\
 \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} & \mathbf{A}^T \mathbf{u} \geq \mathbf{c} \\
 \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{u} \geq \mathbf{0}
 \end{array}$$

**Definice 8.1.** K úloze ve standardním tvaru

$$\begin{array}{l}
 \min \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 \text{za podmínek } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\
 \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
 \end{array}$$

přísluší duální úloha

$$\begin{array}{l}
 \max \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\
 \text{za podmínek } \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}
 \end{array}$$

maximalizační úloha	minimalizační úloha
primární	duální
duální	primární
omezení typu $\leq$	nezáporná proměnná
omezení typu $\geq$	nekladná proměnná
omezení typu rovnice	proměnná neomezená
nezáporná proměnná	omezení typu $\geq$
nekladná proměnná	omezení typu $\leq$
proměnná neomezená	omezení typu rovnice

$$\begin{array}{l}
 \text{minimalizovat } 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\
 \text{za podmínek } 3x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 4, \\
 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 3, \\
 x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2, \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$		
$\geq 0$	$\geq 0$	$\in \mathbb{R}$		
3	6	-1	$\geq$	4
2	-3	2	$\leq$	3
1	-2	4	$=$	2
				max
2	-1	3	min	

Tabulka 3.2: Dualita A

- při „min“ převádíme  $\geq \leftrightarrow \geq$ ,  $\leq \leftrightarrow \leq$ ,  $= \leftrightarrow \in \mathbb{R}$ ,
- při „max“ převádíme  $\leq \leftrightarrow \geq$ ,  $\geq \leftrightarrow \leq$ ,  $\in \mathbb{R} \leftrightarrow =$ ,

tabulku 3.2 doplníme na tabulku 3.3

	$x_1$	$x_2$	$x_3$		
	$\geq 0$	$\geq 0$	$\in \mathbb{R}$		
$y_1$	$\geq 0$	3	6	-1	$\geq$ 4
$y_2$	$\leq 0$	2	-3	2	$\leq$ 3
$y_3$	$\in \mathbb{R}$	1	-2	4	$=$ 2
	$\leq$	$\leq$	$=$		max
	2	-1	3	min	

Tabulka 3.3: Dualita B

$$\min_x \quad c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\min_x \quad c_1 x_1 + c_2 x_2 + u_1 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 - b_1) + v_1 (-x_1)$$

$$\max_{u_1 \geq 0, v_1 \geq 0} -u_1 b_1 + \min_x c_1 x_1 + c_2 x_2 + a_{11} x_1 u_1 + a_{12} x_2 u_2 - v_1 x_1$$

$$\max_{u_1 \geq 0, v_1 \geq 0} -u_1 b_1 \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} c_1 + a_{11} u_1 - v_1 &= 0 \\ c_2 + a_{12} u_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\hat{u}_1 = -u_1$$

$$\max_{\hat{u}_1 \leq 0, v_1 \geq 0} \hat{u}_1 b_1 \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} c_1 - a_{11} \hat{u}_1 - v_1 &= 0 \\ c_2 - a_{12} \hat{u}_1 &= 0 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} a_{11} \hat{u}_1 + v_1 &= c_1 & \rightarrow & a_{11} \hat{u}_1 \leq c_1 \\ a_{12} \hat{u}_1 &= c_2 & \rightarrow & a_{12} \hat{u}_1 = c_2 \end{aligned}$$