

Konvexní funkce

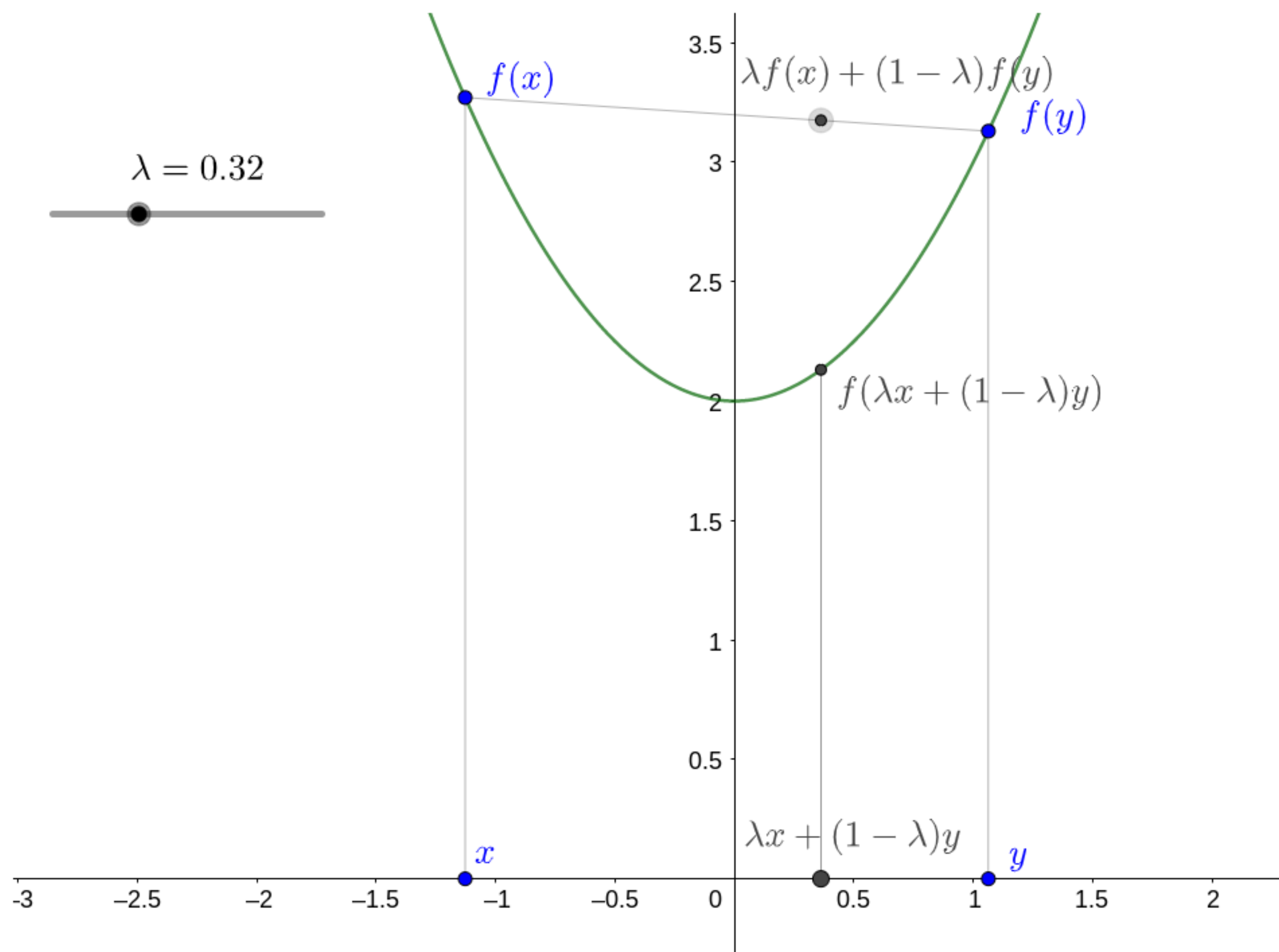
Definice 2.30.: *Necht' je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina. Řekneme, že je funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní, jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.*

Řekneme, že funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je konkávní, jestliže $-f$ je konvexní funkce.

Konvexní funkce

Definice 2.30.: Necht' je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina. Řekneme, že je funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní, jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je konkávní, jestliže $-f$ je konvexní funkce.



Konvexní funkce

Definice 2.30.: *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina. Řekneme, že je funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní, jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.*

Řekneme, že funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je konkávní, jestliže $-f$ je konvexní funkce.

Užitečná kritéria konvexnosti jsou známa pro diferencovatelné funkce jedné proměnné.

Lemma 2.31.: *Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a funkce $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v každém bodě \mathcal{I} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když f' je neklesající funkce na \mathcal{I} .*

Když má funkce druhou derivaci, pak o její konvexnosti rozhoduje znaménko druhé derivace.

Lemma 2.32.: *Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a funkce $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v každém bodě \mathcal{I} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když $f''(x) \geq 0$ v každém bodě $x \in \mathcal{I}$.*

Ve více dimenzích existuje obdoba obou lemmat. Formulace lemmatu 2.31 ve více dimenzích již není tak názorná a využití také není tak přímočaré, jako tomu bylo v jedné dimenzi. V tomto textu si uvedeme pouze přeformulování lemmatu 2.32 pro více dimenzí.

Lemma 2.33.: *Nechť $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě druhé parciální derivace v každém bodě \mathcal{X} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když matice (Hessian) jejích druhých parciálních derivací $\nabla_{x,x}^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní v každém bodě $x \in \mathcal{X}$.*

Konvexní funkce

Definice 2.30.: *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina. Řekneme, že je funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ konvexní, jestliže pro každé $x, y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.*

Řekneme, že funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je konkávní, jestliže $-f$ je konvexní funkce.

Užitečná kritéria konvexnosti jsou známa pro diferencovatelné funkce jedné proměnné.

Lemma 2.31.: *Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a funkce $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v každém bodě \mathcal{I} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když f' je neklesající funkce na \mathcal{I} .*

Když má funkce druhou derivaci, pak o její konvexnosti rozhoduje znaménko druhé derivace.

Lemma 2.32.: *Nechť $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a funkce $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v každém bodě \mathcal{I} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když $f''(x) \geq 0$ v každém bodě $x \in \mathcal{I}$.*

Ve více dimenzích existuje obdoba obou lemmat. Formulace lemmatu 2.31 ve více dimenzích již není tak názorná a využití také není tak přímočaré, jako tomu bylo v jedné dimenzi. V tomto textu si uvedeme pouze přeformulování lemmatu 2.32 pro více dimenzí.

Lemma 2.33.: *Nechť $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě druhé parciální derivace v každém bodě \mathcal{X} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když matice (Hessian) jejích druhých parciálních derivací $\nabla_{x,x}^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní v každém bodě $x \in \mathcal{X}$.*

Konvexní funkce

Lemma 2.33.: *Nechť $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě druhé parciální derivace v každém bodě \mathcal{X} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když matice (Hessian) jejích druhých parciálních derivací $\nabla_{x,x}^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní v každém bodě $x \in \mathcal{X}$.*

Lemma 2.34.: *Pro symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je následující ekvivalentní:*

- *A je pozitivně semidefinitní.*
- *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^\top A x \geq 0$.*
- *Všechna vlastní čísla matice A jsou nezáporná.*
- *Determinanty všech hlavních podmatic matice A jsou nezáporné, tj.*

$$\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\}, I \neq \emptyset \quad \text{je} \quad \det(A_{i,j}, i, j \in I) \geq 0.$$

- *Existuje regulární matice Q a diagonální matice Λ s nezápornými prvky na diagonále tak, že $A = Q^\top \Lambda Q$.*

Konvexní funkce

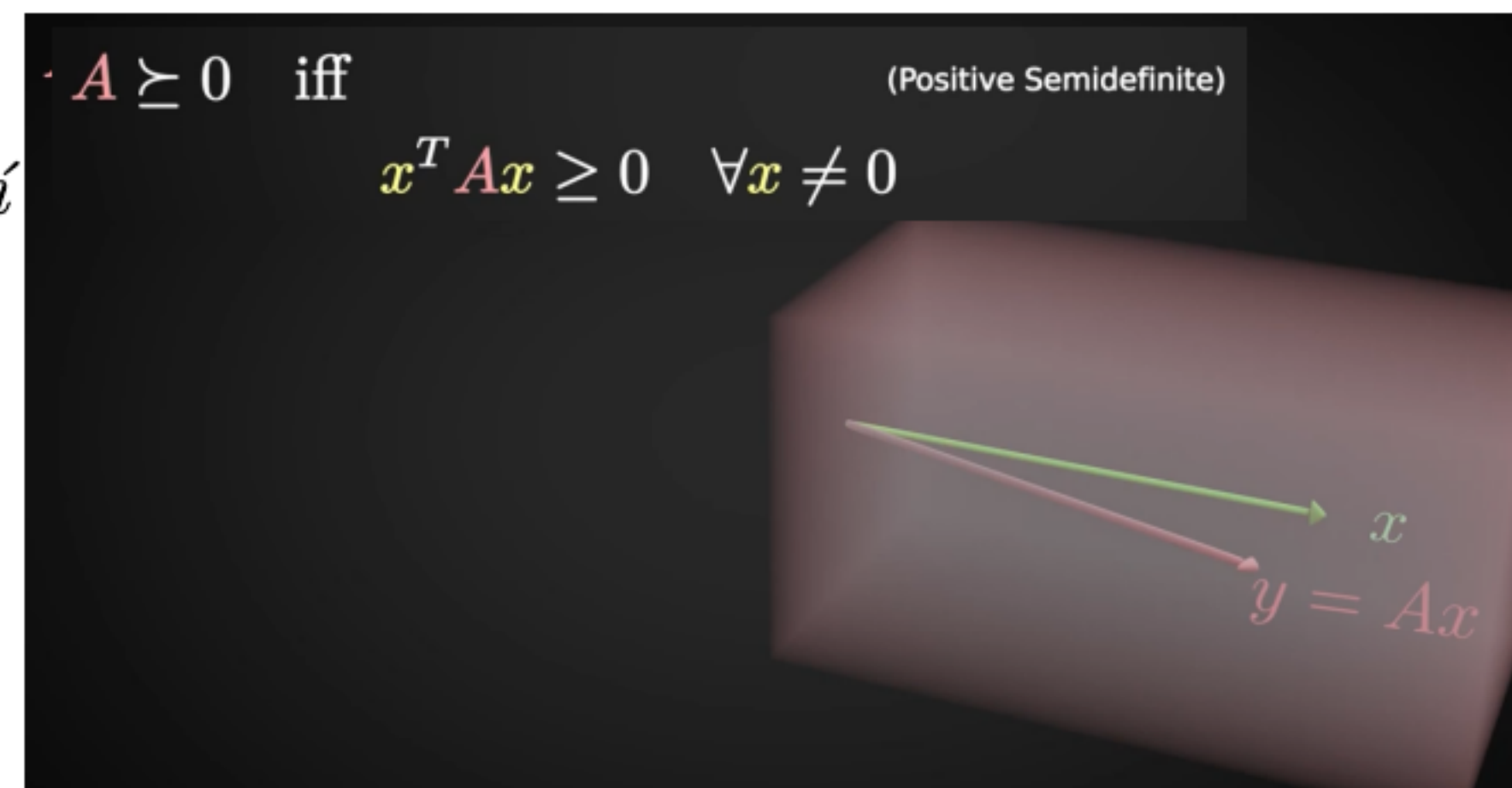
Lemma 2.33.: *Nechť $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace v každém bodě \mathcal{X} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když matice (Hessian) jejích druhých parciálních derivací $\nabla_{x,x}^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní v každém bodě $x \in \mathcal{X}$.*

Lemma 2.34.: *Pro symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je následující*

- *A je pozitivně semidefinitní.*
- *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^\top A x \geq 0$.*
- *Všechna vlastní čísla matice A jsou nezáporná.*
- *Determinanty všech hlavních podmatic matice A jsou nezáporné, tj.*

$$\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\}, I \neq \emptyset \quad \text{je} \quad \det(A_{i,j}, i, j \in I) \geq 0.$$

- *Existuje regulární matice Q a diagonální matice Λ s nezápornými prvky na diagonále tak, že $A = Q^\top \Lambda Q$.*



Konvexní funkce

Lemma 2.33.: *Nechť $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojitě druhé parciální derivace v každém bodě \mathcal{X} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když matice (Hessian) jejích druhých parciálních derivací $\nabla_{x,x}^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní v každém bodě $x \in \mathcal{X}$.*

Lemma 2.34.: *Pro symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je následující ekvivalentní:*

- *A je pozitivně semidefinitní.*
- *Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^\top A x \geq 0$.*
- *Všechna vlastní čísla matice A jsou nezáporná.*
- *Determinanty všech hlavních podmatic matice A jsou nezáporné, tj.*

$$\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\}, I \neq \emptyset \quad \text{je} \quad \det(A_{i,j}, i, j \in I) \geq 0.$$

- *Existuje regulární matice Q a diagonální matice Λ s nezápornými prvky na diagonále tak, že $A = Q^\top \Lambda Q$.*

Find the **eigenvalues** of $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right) &= (3-\lambda)(1-\lambda) - (1)(4) \\ &= (3-4\lambda+\lambda^2) - 4 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

Konvexní funkce

Lemma 2.33.: *Nechť $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a funkce $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace v každém bodě \mathcal{X} . Pak f je konvexní funkce tehdy a jen tehdy, když matice (Hessian) jejích druhých parciálních derivací $\nabla_{x,x}^2 f(x)$ je pozitivně semidefinitní v každém bodě $x \in \mathcal{X}$.*

Lemma 2.34.: *Pro symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je následující ekvivalen*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

Hlavní podmatice mají stejný výběr řádkových a sloupcových indexů:

- A je pozitivně semidefinitní.

- Pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí $x^\top A x \geq 0$.

- Všechna vlastní čísla matice A jsou nezáporná.

- Determinanty všech hlavních podmatic matice A jsou nezáporné, tj.

$$\left(\begin{array}{c} \{ (1), (6), (11), (16) \} \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \right\} \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 13 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \right\} \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \right\} \end{array} \right)$$

$$\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\}, I \neq \emptyset \quad \text{je} \quad \det(A_{i,j}, i, j \in I) \geq 0.$$

- Existuje regulární matice Q a diagonální matice Λ s nezápornými prvky na diagonále tak, že $A = Q^\top \Lambda Q$.

Konvexní funkce - příklady

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.3. a) f, g konvexní funkce, $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g$ je konvexní funkce

b) f_i je konvexní funkce $\Rightarrow \sup f_i$ je konvexní funkce,

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

- a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|$,
- b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, y > 0$,
- c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$,
- d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$,
- e) $f(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0$.

Lemma 2.38.: *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina, $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je (afinně) lineární funkce a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(h(x))$ je konvexní funkce.*

Lemma 2.39.: *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina, $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající konvexní funkce. Pak $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(h(x))$ je konvexní funkce.*

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|,$

b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, y > 0,$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4,$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$

e) $f(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0.$

Řešení.

a) ano, každá norma je konvexní, z trojúhelníkové nerovnosti

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\|$$

nebo

f, g konvexní funkce, $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g$ je konvexní funkce

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|$,

b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, y > 0$,

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$,

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$,

e) $f(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2x}{y^3}$$

Řešení.

b) ano, hessián $H(x, y)$ je pozitivně semidefinitní matice:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2/y & -2x/y^2 \\ -2x/y^2 & 2x^2/y^3 \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} 2/y \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{pro } y > 0 \quad \checkmark$$

$$\det \begin{pmatrix} 2x^2/y^3 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{pro } y > 0 \quad \checkmark$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{pmatrix} = 4 \frac{x^2}{y^4} - 4 \frac{x^2}{y^4} = 0 \geq 0 \quad \checkmark$$

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|,$

b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, y > 0,$

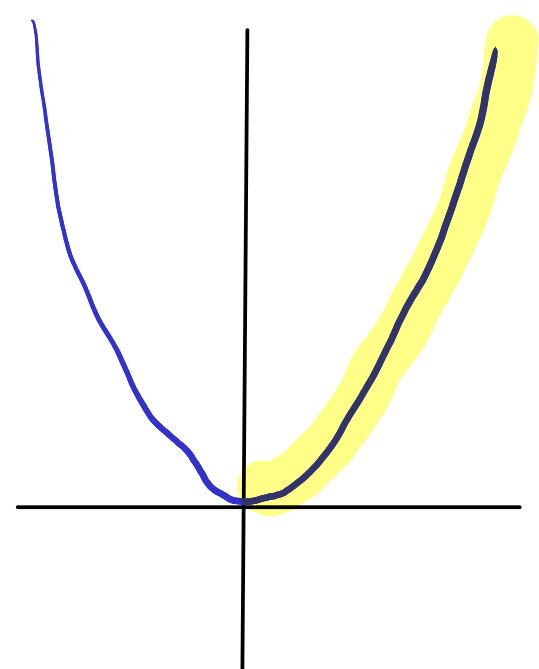
c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4,$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$

e) $f(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0.$

Lemma 2.38.: *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina, $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je (afinně) lineární funkce a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Pak $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(h(x))$ je konvexní funkce.*

Lemma 2.39.: *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní množina, $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající konvexní funkce. Pak $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto g(h(x))$ je konvexní funkce.*



pro nezáporný argument, což $x^2 + y^2$ je, je $g(z) = z^4$ neklesající

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|,$

b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, y > 0,$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4,$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$

e) $f(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0.$

Řešení.

d) ne, matice druhých derivací není pozitivně semidefinitní (poslední prvek diagonály je záporný)

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2z + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$$

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) \not\geq 0$$

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je konvexní:

a) $f(x_1, \dots, x_n) = |x_1| + \dots + |x_n|,$

b) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, y > 0,$

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4,$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz,$

e) $f(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0.$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y \log(xy) + xy \frac{1}{xy} \cdot y \\ &= y (\log(xy) + 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$$

Řešení.

e) ne, hessián $H(x, y)$ není pozitivně semidefinitní matice na celém definičním oboru funkce.

$$\det \begin{pmatrix} y/x & 2 + \log xy \\ 2 + \log xy & x/y \end{pmatrix} \geq 0 \text{ pro } x > 0 \text{ a } y > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} x/y & 2 + \log xy \\ 2 + \log xy & y/x \end{pmatrix} \geq 0 \text{ pro } x > 0 \text{ a } y > 0$$

$$\begin{pmatrix} y/x & 2 + \log xy \\ 2 + \log xy & x/y \end{pmatrix} \cdot \left(\nabla_{x,y}^2 f(x) \text{ je pozitivně semidefinitní v každém bodě } x \in \mathcal{X}. \right)$$

$$\det H(x, y) = 1 - (2 + \log xy)^2 \stackrel{?}{\geq} 0 \quad \forall x, y \quad \text{NE}$$

Konvexní funkce - příklady

Příklad 4.5. Rozhodněte, která z následujících množin je konvexní:

a) $\{x, y \in \mathbb{R} : e^x + e^y \leq 10\}$

b) $\{x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 5, e^x + e^y \leq 10\}$

Věta 2.40.: *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ konvexní, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $r \in \mathbb{R}$. Pak množiny $\{x \in \mathcal{X} : f(x) \leq r\}$, $\{x \in \mathcal{X} : f(x) < r\}$ jsou konvexní.*