10. Symetrická úloha NLP

Definice 10.1. Symetrickou úlohou nelineárního programování nazýváme úlohu

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{za podmínek } g_k(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad k = 1, \dots, m,$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

a přiřadíme ji Lagrangeovu funkci

Lagrangeovy multiplikátory („duální proměnné v LP)

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{m} y_k g_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}.$$

Definice 10.2. Řekneme, že pro bod $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^m$ jsou splněny globální podmínky optimality (GPO) pro symetrickou úlohu nelineárního programování, je-li $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ sedlový bod Lagrangeovy funkce pro $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}$, tj.

$$\forall \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}: \quad L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) \ge L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \ge L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}).$$

(pro vlastní výpočet těžko použitelné, proto LPO...)

Definice 10.3. Řekneme, že pro bod $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^m$ jsou splněny lokální podmínky optimality (LPO) pro symetrickou úlohu nelineárního programování, platí-li

$$\begin{array}{lll} \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \ge 0, & \boldsymbol{x}^{*T} \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0, & \boldsymbol{x}^* \ge 0, \\ \underbrace{\nabla_y L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le 0,}_{\text{„sedlo"}} & \underbrace{\boldsymbol{y}^{*T} \nabla_y L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0,}_{\text{„komplementarita"}} & \boldsymbol{y}^* \ge 0. \end{array}$$

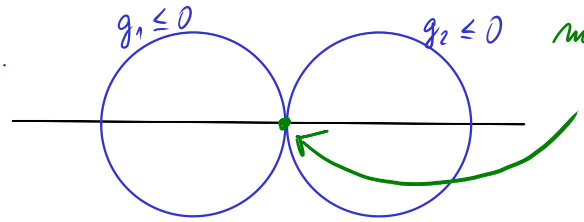
„omezení" (tj. výsledný bod musí být přípustný)

Definice 10.6. Podmínky regularity

i) V bodě $\boldsymbol{x}$ je splněna *podmínka lineární nezávislosti*, jsou-li v bodě $\boldsymbol{x}$ nezávislé gradienty aktivních omezení.

ii) Úloha splňuje *Slaterovu podmínku*, jestliže existuje $\bar{\boldsymbol{x}} \ge 0$, pro které $g_k(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots, m$.

Příklad 10.7. Nalezněte příklad, kdy nejsou splněny podmínky regularity a přitom existuje optimální řešení.



$\min x_1 + x_2$

$\left.\begin{array}{l} g_1 \le 0 \\ g_2 \le 0 \end{array}\right\}$ dva kruhy; průnik jediný bod $\Rightarrow$ optimální bod, ale nesplňuje GPO; nesplňuje regularitu

Tvrzení 10.8. *Platí následující implikace*

i) $\boxed{GPO} \Rightarrow \boxed{\text{optimalita}}$,

ii) $\boxed{\text{optimalita}}$ $+f, g_k$ *konvexní a splněna podmínka regularity nebo* g_k *lineární* $\Rightarrow \boxed{GPO}$,

iii) $\boxed{GPO}$ $+f, g_k$ *diferencovatelné* $\Rightarrow \boxed{LPO}$,

iv) $\boxed{LPO}$ $+f, g_k$ *konvexní a diferencovatelné* $\Rightarrow \boxed{GPO}$.

Pro následující příklady většinou postup:

iv) $\boxed{LPO}$ $+f, g_k$ *konvexní a diferencovatelné* $\Rightarrow \boxed{GPO} \Rightarrow \boxed{\text{optimalita}}$,

Pozor na případy, kdy jsou pro nějaký bod splněné LPO, ale f, g nejsou konvexní (či dif), pak nemůžete tvrdit, že bod je optimální (ale neznamená to, že nemůže být)

Příklad 10.9. Sestavte a vyřešte LPO pro úlohu

$$\max\left\{-x_1^2 - x_2^2 : \ x_1 + x_2 \geq 2, 2x_1 + x_2 \geq 3, \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}.$$

Je nalezený bod opravdu globálním maximem?

Definice 10.3. Řekneme, že pro bod $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^m$ jsou splněny lokální podmínky optimality (LPO) pro symetrickou úlohu nelineárního programování, platí-li

$$\nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \geq 0, \quad \boldsymbol{x}^{*T} \nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0, \quad \boldsymbol{x}^* \geq 0,$$
$$\nabla_y L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \leq 0, \quad \boldsymbol{y}^{*T} \nabla_y L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0, \quad \boldsymbol{y}^* \geq 0.$$

$\max -x_1^2 - x_2^2 \iff \min x_1^2 + x_2^2$

minimum ve stejném bodě jako $\min \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

tj. MINIMALIZUJEME VZDÁLENOST BODU (Z MNOŽINY PŘÍPUSTNÝCH ŘEŠENÍ) OD POČÁTKU $[0,0]$

① sestavíme Lagrangeovu funkci:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 + x_2^2 + y_1(2 - x_1 - x_2) + y_2(3 - 2x_1 - x_2).$$

② napíšeme LPO: (po složkách)

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - y_1 - 2y_2 &\geq 0, \\ 2x_2 - y_1 - y_2 &\geq 0, \end{aligned}\right\} \frac{\partial L}{\partial x} \quad (x = (x_1, x_2))$$
$$\left.\begin{aligned} x_1(2x_1 - y_1 - 2y_2) &= 0, \\ x_2(2x_2 - y_1 - y_2) &= 0, \end{aligned}\right\} \text{„komplementarita"}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

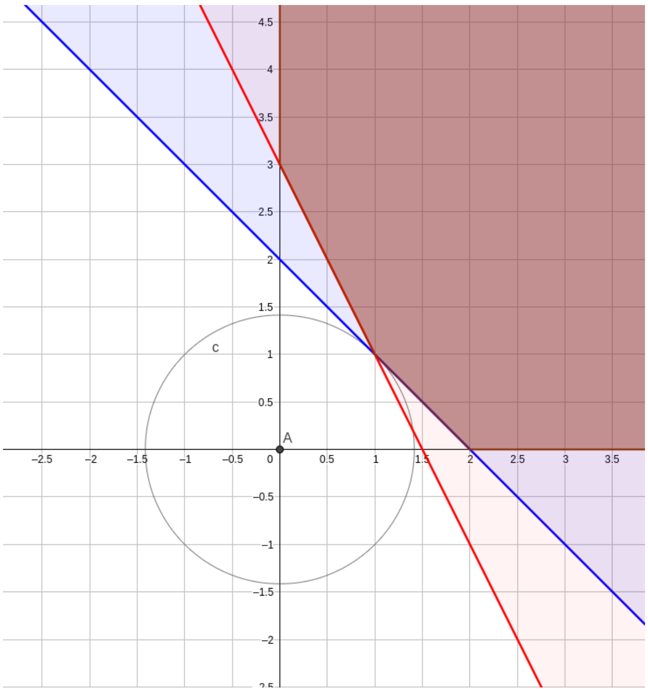
$$\left.\begin{aligned} 2 - x_1 - x_2 &\leq 0, \\ 3 - 2x_1 - x_2 &\leq 0, \end{aligned}\right\} \frac{\partial L}{\partial y} \quad (\text{omezení})$$
$$\left.\begin{aligned} y_1(2 - x_1 - x_2) &= 0, \\ y_2(3 - 2x_1 - x_2) &= 0, \end{aligned}\right\} \text{„komplementarita" (duální)}$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

③ řešíme: Uvědomit si: $y_k = 0 \Rightarrow$ Předpokládáme, že omezení není aktivní (i když být může)

2 omezení $\Rightarrow$ 4 případy: $y_k > 0$ („duální cena") $\Rightarrow$ omezení je aktivní $\Rightarrow g_k = 0$

1) $y1 > 0$, první omezení s rovností; $y2 = 0$ druhé omezení s (ostrou) nerovností.
2) $y2 > 0$, druhé omezení s rovností; $y1 = 0$ první omezení s (ostrou) nerovností.
3) $y1 = 0$; $y2 = 0$
4) $y1 > 0$, $y2 > 0$ (tj. obě omezení aktivní)

OBRÁZEK POMŮŽE :



Ať nemusíme vyhodnocovat všechny případy.

z obr. vidíme, že obě omezení budou aktivní, tj. $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$

(pokud bychom to „neviděli", počítali bychom ostatní případy. Ty by vedly k nějakému sporu v podmínkách)

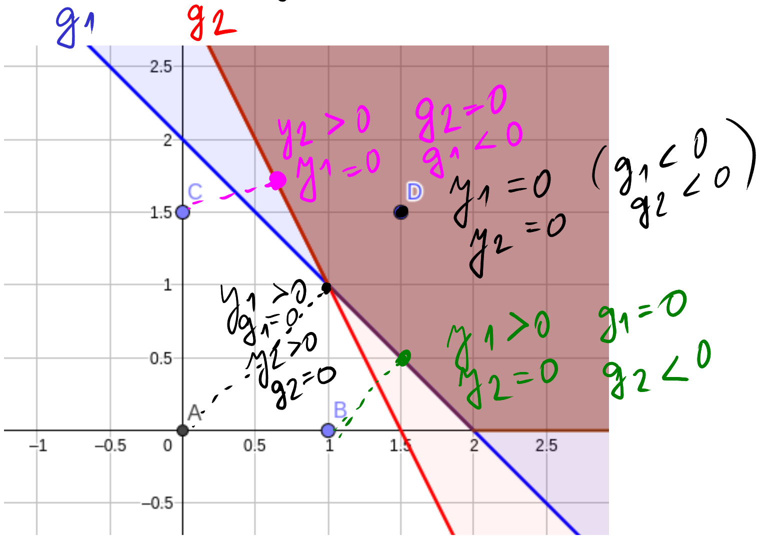
$$\left.\begin{aligned} 2 - x_1 - x_2 &= 0 \\ 3 - 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

všechny LPO splněny (ověřte dosazením) + f, g jsou konvexní a spojitě diferencovatelné

$\Rightarrow$ GPO $\Rightarrow$ bod $[1,1]$ je optimální.

K zamyšlení: jaký případ by nastal, kdybychom hledali nejbližší bod z MPŘ k bodu:

1) B $[1,0]$
2) C $[0, 1.5]$
3) D $[1.5, 1.5]$



Příklad 10.11. Nalezněte bod z množiny

$$\mathcal{M} = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 \geq (x_2 - 1)^2, x_1 + 2x_2 \geq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\},$$

který je nejblíže bodu $[-1, 0]$

$$\boxed{\min_{x_1, x_2} \sqrt{(x_1 - (-1))^2 + x_2^2}}$$

minimum ve stejném bodě jako v úloze

$$\boxed{\min_{x_1, x_2} (x_1 + 1)^2 + x_2^2}$$

, kterou řešíme (kvůli snadnějšímu počítání)

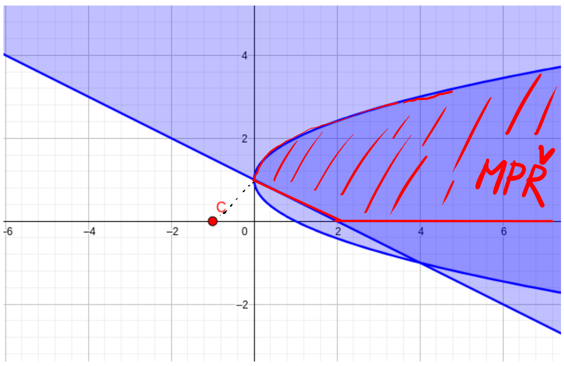
Řešení.

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1 + 1)^2 + x_2^2 + y_1((x_2 - 1)^2 - x_1) + y_2(2 - x_1 - 2x_2).$$

LPO mají tvar

$$\begin{aligned} 2(x_1 + 1) - y_1 - y_2 &\geq 0, \\ 2x_2 + 2y_1(x_2 - 1) - 2y_2 &\geq 0, \\ x_1(2(x_1 + 1) - y_1 - y_2) &= 0, \\ x_2(2x_2 + 2y_1(x_2 - 1) - 2y_2) &= 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_2 - 1)^2 - x_1 &\leq 0, \\ 2 - x_1 - 2x_2 &\leq 0, \\ y_1((x_2 - 1)^2 - x_1) &= 0, && (10.11) \\ y_2(2 - x_1 - 2x_2) &= 0, && (10.12) \\ y_1 \geq 0, y_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



Na základě obrázku hledejme řešení na průniku hranic obou množin, tj. $y_1 > 0, y_2 > 0$. Pak průnikem hranic omezení je bod $[0, 1]$ a např. $y_1^* = 1, y_2^* = 1$. Účelová funkce je konvexní, omezení také, proto bod $[0, 1]$ je optimálním řešením.

opět k zamyšlení: zkuste „si hrát" s druhým omezením (sklonem, posunutím), aby vycházely případy $y_2 = 0$ či $y_1 = 0$

Příklad 10.10. Nalezněte bod z množiny

$$\mathcal{M} = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 \le e^{x_1}, x_2 \le e^{-x_1} \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\right\},$$

který je nejblíže bodu $[0, 3]$

Řešení. Převedeme na úlohu SNLP.

$$\min \left\{x_1^2 + (x_2 - 3)^2 : \; x_2 \le e^{x_1}, x_2 \le e^{-x_1} \; x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\right\}.$$

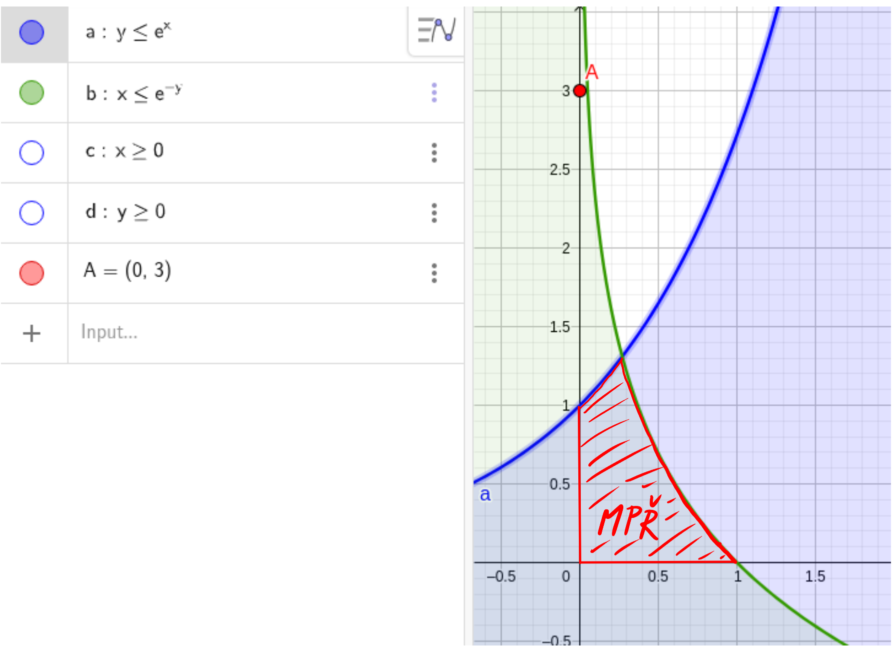
a

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 + (x_2 - 3)^2 + y_1(x_2 - e^{x_1}) + y_2(x_2 - e^{-x_1}).$$

LPO mají tvar

$$\begin{aligned} 2x_1 - y_1 e^{x_1} - y_2 e^{-x_1} &\ge 0, \\ 2x_2 + 6 + y_1 + y_2 &\ge 0, \\ x_1(2x_1 - y_1 e^{x_1} - y_2 e^{-x_1}) &= 0, && (10.5) \\ x_2(2x_2 + 6 + y_1 + y_2) &= 0, && (10.6) \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 - e^{x_1} &\le 0, \\ x_2 - e^{-x_1} &\le 0, \\ y_1(x_2 - e^{x_1}) &= 0, && (10.7) \\ y_2(x_2 - e^{-x_1}) &= 0, && (10.8) \\ y_1 \ge 0, y_2 &\ge 0. \end{aligned}$$



OMEZENÍ NEJSOU KONVEXNÍ!

TZN. nemůžeme udělat závěr

LPO + konvexita ⇒ OPO ⇒ optimalita

(i když z obrázku „vidíme", který bod je optimální)