Tvrzení 9.1 (Farkasova věta)**.** *Soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má nezáporné řešení tehdy a jen tehdy, když pro každé $\boldsymbol{u}$, které splňuje $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \geq 0$, platí $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \geq 0$.*

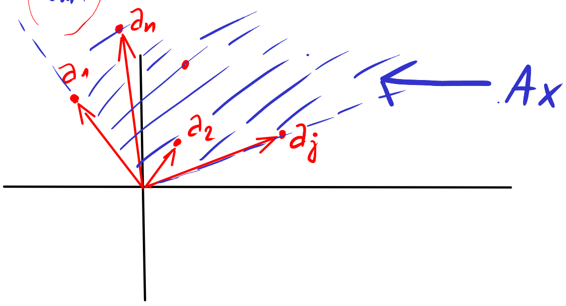
Geometrická interpretace

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\quad a_1 \qquad\quad a_j \qquad\quad a_n$$

(verze věty pro $\tilde{u} = -u$; tj. „...pro každé $\tilde{u}$, které splňuje $A^T\tilde{u} \leq 0$, platí $b^T\tilde{u} \leq 0$." EKVIVALENTNÍ

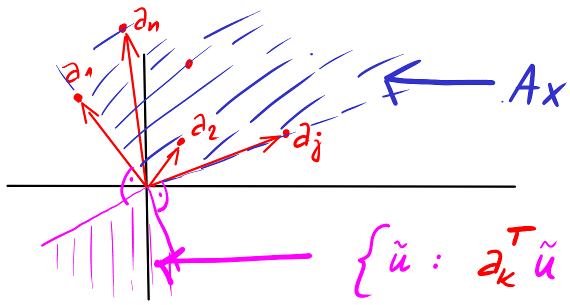
Ax : $\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{a_1} x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_j x_j + \ldots + a_n x_n$

$x \geq 0$



vzpomeňte :

<u>nezáporný obal</u> ... $\operatorname{pos}(S) = \left\{ \sum_{s \in I} \lambda(s)s \,:\, \lambda(s) \geq 0 \; \forall s \in I, \; \emptyset \neq I \subset S, \; I \text{ konečn}\right.$



$\{\tilde{u} : a_k^T \tilde{u} \leq 0 \quad \forall k\}$

vzpomeňte :

2 vektory v, w :

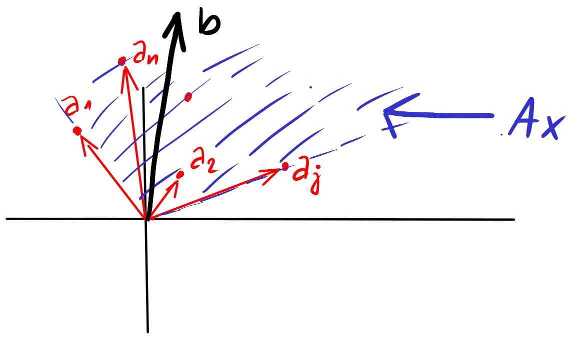
$v^T w > 0$

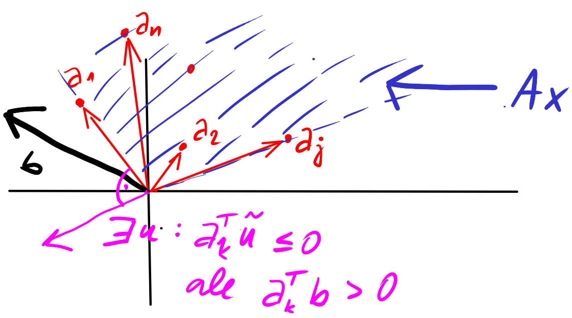
$v^T w = 0$

$v^T w < 0$

1) $Ax = b$
$x \geq 0$

2) $Ax \neq b$
$x \geq 0$





$\exists \tilde{u} : a_k^T \tilde{u} \leq 0$

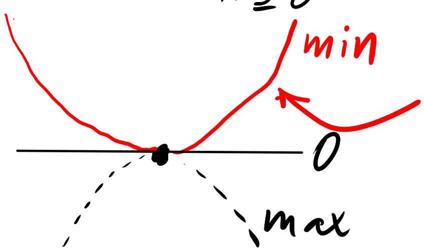
ale $a_k^T b > 0$

Farkasova věta : „ b je buď uvnitř ////// (tj $Ax = b$) nebo vně "

ODVOZENÍ Z DUALITY

(P) max $0^T x = 0$
$Ax = b$
$x \geq 0$

(D) min $b^T u$
$A^T u \geq 0$
$u \in \mathbb{R}^m$



tj. každé přípustné u (tj. splňující $A^T u \geq 0$) je horní mez maximalizačního problému

tj. $b^T u \geq 0$ ← hodnota účelové funkce primárního problému

Příklad 9.2. Rozhodněte, zda má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nezáporné řešení. ? $x \geq 0$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Řešení. Příklad je přímo připravený na použití Farkasovi věty. Budeme tedy zkoumat, zda-li pro (u_1, u_2) taková, že $A^T u \geq 0$ platí $b^T u \geq 0$. Zapišme si nejdříve co znamená $A^T u \geq 0$.

$$\begin{array}{rrl} 2u_1 & -3u_2 & \geq 0 \quad 1) \\ u_1 & +2u_2 & \geq 0 \quad 2) \\ -u_1 & & \geq 0 \quad 3) \\ & 4u_2 & \geq 0 \quad 4) \end{array}$$

A nyní zjistíme, jestli platí $b^T u \geq 0$, výraz budeme upravovat:

$$\underbrace{2u_1 + 6u_2}_{} = 2 \cdot (u_1 + 2u_2) + 2u_2 \geq 0.$$

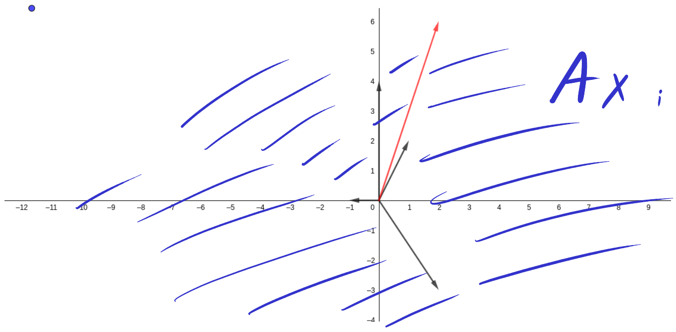
$$2u_1 + 4u_2 + 2u_2$$

$$\underbrace{2(u_1 + 2u_2)}_{\geq 0 \ (2)} + \underbrace{2u_2}_{\geq 0} \ (4)$$

Graficky:

Příklad 9.2. Rozhodněte, zda má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nezáporné řešení.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

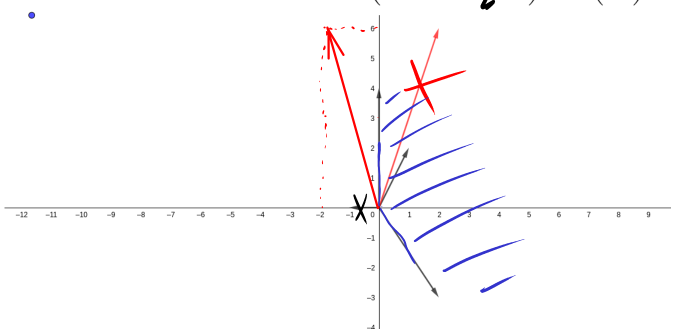


$Ax \,;\, x \geq 0$ $\Rightarrow$ pro jakékoliv b má soustava nezáporné řešení

Kdyby $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ a $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Příklad 9.2. Rozhodněte, zda má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ nezáporné řešení.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$



pak soustava $Ax = b, x \geq 0$ nemá nezáporné řešení

Příklad 9.4. Napište Farkasovu větu pro existenci řešení soustavy:

$$\{2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 2, -x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5 = 6, 3x_1 + 4x_3 + 7x_4 + x_5 \geq 3\}$$

pro $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \in \mathbb{R}, x_5 \in \mathbb{R}$. Úlohu vyřešte.

① převod na „standardní tvar" pro F.V. : $Ax = b;\ x \geq 0$:

$\tilde{x}_3 = -x_3;\ \tilde{x}_3 \geq 0$ $\quad x_4 = x_4^+ - x_4^-$ $\quad x_5^+ - x_5^- = x_5$

x_1	x_2	$\tilde{x}_3$	x_4^+	x_4^-	x_5^+	x_5^-	x_6	x_7	b
2	3	1	2	-2	-1	1	1	0	2
-1	2	0	1	-1	-5	5	0	0	6
3	0	-4	7	-7	1	1	0	-1	3

② $A^T u \geq 0$ po jednotlivých nerovnostech:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

i) $2u_1 - u_2 + 3u_3 \geq 0$

ii) $3u_1 + 2u_2 \geq 0$

iii) $u_1 - 4u_3 \geq 0$

iv) $2u_1 + u_2 + 7u_3 \geq 0$

v) $-2u_1 - u_2 - 7u_3 \geq 0$

$\Rightarrow 2u_1 + u_2 + 7u_3 = 0$ (A)

vi) $-u_1 - 5u_2 + u_3 \geq 0$

vii) $u_1 + 5u_2 - u_3 \geq 0$

$\Rightarrow u_1 + 5u_2 - u_3 = 0 \quad /\cdot 7$

viii) $u_1 \geq 0$

$-u_3 \geq 0$

$9u_1 + 36u_2 = 0$

$u_1 = -4u_2$

z (A): $-8u_2 + u_2 + 7u_3 = 0$

$u_2 = u_3$

$\Rightarrow u: (-4t, t, t)$

ověření podmínek i) – viii):

z vii a viii plyne $t \leq 0$; poté všechny splněny

$\Rightarrow$ všechna u splňující $A^T u$ jsou ve tvaru

$(-4t, t, t);\ t \leq 0$, což je stejné jako $(4d, -d, -d);\ d \geq 0$:

zkoumáme $b^T u \overset{?}{\geq} 0$: $\quad 2(4d) - 6d - 3d = -d$

$\left(b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ $\quad$ tedy pro $d \geq 0$ máme $b^T u \leq 0$

ZÁVĚR: F.V. není splněna, tedy $Ax = b$ nemá nezáporné řešení

Pozn. Kdyby např. $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, pak $Ax = b$ nezáporné řešení má

Příklad 9.5. Formulujte Farkasovu větu pro existenci řešení soustavy:

(1) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge 0\}$
(2) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \ge 0\}$
(3) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$

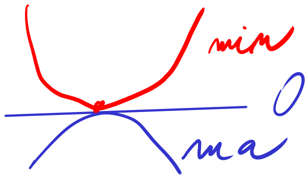
(1) Pro úlohu ve tvaru nerovností:

ODVOZENÍ Z DUALITY:

$Ax \le b$, $x \ge 0$

P: max $0^T x$
$Ax \le b$
$x \ge 0$

D: min $b^T u$
$A^T u \ge 0$
$u \ge 0$



$\Rightarrow b^T u \ge 0$

ODVOZENÍ PŘEVODEM NA F.V.

$Ax \le b$

$Ax + Iy = b$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

y .. skluzové proměnné

$\tilde{A} = (A \mid I)$ $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\tilde{A}\tilde{x} = b$

$\tilde{A}^T u \ge 0 \Rightarrow A^T u \ge 0$ a $\underbrace{Iu \ge 0}_{\Rightarrow u \ge 0}$

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \ge 0,\ \boldsymbol{u} \ge 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \ge 0$

(2)

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \le 0,\ \boldsymbol{u} \ge 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \le 0$

(3)

$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u} \ge 0$